摄动法及其在流体力学中的应用

〔美〕M.范戴克 著

科学出版社

摄动法及其在流体力学中的应用

〔美〕M. 范戴克 著

李家春 译

科 学 出 版 社

1 9 8 7

内 容 简 介

本书是一部摄动法理论与应用并重的优秀著作，系统综述摄动法的一般理论，着重阐述奇异摄动法（包括匹配渐近展开法和变形坐标法），并以不同速度范围（从低亚声速到高超声速）的粘性、无粘性流动问题为实例，说明方法的应用．注释部份介绍了方法的新发展和新应用．

本书可供力学、大气动力学、海洋动力学、声学、光学、应用数学等专业的高年级大学生、研究生、教师和有关科研、工程技术人员参考．

M. Van Dyke

PERTURBATION METHODS IN FLUID MECHANICS

Annotated edition

The Parabolic Press, 1975

摄动法及其在流体力学中的应用

〔美〕M. 范戴克 著

李家春 译

责任编辑 晏名文

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1987年6月第一版　　开本：787×1092 1/32

1987年6月第一次印刷　　印张：9 7/8

印数：0001—3,000　　字数：217,000

统一书号：13031·3535

本社书号：5175·13—2

定价：2.35元

译 者 的 话

虽然“摄动”一词渊源于天体力学，但它同流体力学的发展有着密切的关系．奇异摄动理论在流体力学中的早期应用，可以追溯到 Stokes (1847) 关于非线性深水波理论的研究；Prandtl (1904) 的边界层理论不仅对航空工程的发展有着划时代的意义，而且也是以后发展起来的匹配渐近展开法的物理模型和雏型；Lighthill (1949) 和郭永怀(1953)在研究超声速流锥形激波和平板边界层时，分别发展了 Poincaré (1886) 的思想，形成了著名的 PLK 方法(变形坐标法)．本书全面地阐述了上述经典的和现代的流体力学问题，可以使读者对于奇异摄动理论的概貌和物理背景有比较全面深入的了解．

然而，奇异摄动理论的应用不仅仅局限于流体力学领域．毫不夸张地说，目前，这一理论己经成为从事力学、大气动力学、海洋动力学、声学、光学、应用数学等许多专业的理论研究人员必不可少的手段与工具．在近期文献中，这种数学方法应用得相当广泛．但是，这方面的知识恰恰是我国高等教育中所欠缺的．在本书中，除了流体力学的例子外，还综述了奇异摄动的一般理论，例如奇异性的物理判据，匹配原理，合成法则，最优坐标，改进级数收敛性的理论与方法；介绍了作者本人多年运用这一方法的经验与技巧．尤其是注释部分，简要地阐述了奇异摄动理论的新进展和新应用．与同类书籍相比，本书确有其独到之处．即使对于已经初步掌握奇异摄动法的读者来说，阅读本书也会有所收益．无疑，本书中译本的出版将受到我国广大读者的欢迎．

译者衷心感谢皮德宝同志，他仔细阅读了原稿，并提出了宝贵意见。由于水平所限，译稿中错误疏漏之处在所难免，恳请读者提出批评和建议。

李家春

一九八五年元月

注 释 版 序

自 1964 年本书问世以来，有关力学中摄动法的科技文献如雨后春笋般地涌现．那时，大家对解决奇异摄动问题的各种方法还不太熟悉，感到它有些高深莫测．但现在，就所有对研究工作感兴趣的人来说，奇异摄动法已经成为他们解析工具的一部分。这一方法在连续介质力学中的应用，起初主要局限于经典的流体动力学和线性弹性理论，现已渗透到更为广泛的领域中去了。原先的方法得到了改进，新的方法正在不断发展．即使仅就流体力学而言，研究论文总数就有好几千．

与此同时，还出版了一些其它书籍来总结和指导这方面的工作。同本书一样带有应用性质的有 Bellman (1964), Cole (1968), Nayfeh (1973) 的书；论述更加数学化一些的有 O'Malley (1968, 1974), Eckhaus(1973) 的著作．

尽管本书涉及面有限，又有上述书籍与之媲美，但它显然仍然有实用价值．直到以平价继续印行、出售使原出版者无利可图时，本书销售量一直尚佳．因为作者不愿提高书价，所以决定亲自再版这版书．

作者借再版之机，校正了书中的一些错误，并在书末添加了一节注释，以使本书能适应新的情况．这些注释是针对于页边有如右所示的那种标记的正文的．这种标记指引读者去了解有关后来发展的讨论和参阅进一步的参考文献。当然，即使书末的文献数目增加了一倍，仍然仅是近十年来所发表论文的一小部分。不过，我们仍尽量把那些不仅同原先的正

文有密切关系，而且还提出了重要新概念、新结果的所有文献都包括进去(参看注 1)。

书评家和读者(不限于流体力学专业)最普遍的意见是：对于自学或作为教科书来说，本书有点过于简洁．尽管如此，本书被选用为大学教科书的场合，比作者所预期的要多．为此目的，每章末尾的习题有时要求过高(有若干情形，实际上不能求解)．在注 3 中，我们尽力改善这种状况．如蒙索取，作者将乐于为同行提供自己编写的题解书，并附以近年来使用的补充题。

自 1959 年后，作者一直执教于 Stanford 大学航空航天系．象原版书一样，注释版是根据一个学期(三个月)的研究生课程的讲义编写而成的．这个版本同样也利用了作者本人及其学生的研究成果，这些工作多年来一直得到空军科研部的支持。

M. 范戴克

Stanford, California

1975 年 6 月

原　版　序

本书主要论述流体力学中的奇异摄动问题.特别是,统一地阐述近十五年来发展起来的两种颇为一般的方法. 这两种方法是同 Lagerstrom, Kaplum 和 Cole 的名字,同 Lighthill 和 Whitham 的名字联系在一起的. 在尚未入门的人看来,本书似乎偏重于摄动理论的反常部分. 这样做与其说是因为其方法新颖,还不如说是由于奇异摄动问题在流体力学中已屡见不鲜,并且在现代研究中日益频繁出现的缘故. 然而,在现有的著作中,还没有一本兼论正则摄动和奇异摄动内容的书,所以,本书仍从对两者都适用的一般方法讲起.

本书主要通过例子进行阐述.除了少数几个数学模型外,这些例子全都取自流体力学. 诚然,所讨论的方法正在应用力学的其它分支迅速得到应用,作者也希望,本书对这些领域的研究人员有所裨益. 不过,上述两种一般方法都是为了解决流体流动问题而提出来的,并主要在这个领域中得到了发展和应用. 事实上,书中大部分例子只限于在本世纪中期被描述为经典空气动力学的那些课题. 然而,奇异摄动问题显然在诸如非平衡流和辐射流、磁流体动力学、等离子体动力学和稀薄气体动力学这样一些新学科中比比皆是. 可以肯定,在上述那些新学科中,以及在海洋学、气象学和研究大范围流体运动的其它领域中,所述方法将会得到卓有成效的应用.

从 1959 年起,作者在 Stanford 大学航空航天系开设了一门研究生课程,本书就是根据当时的一系列讲稿编写而成的. 所以,书中自然大量吸取了作者本人及其学生的研究成

果(其中很多工作曾得到空军科研部的支持)。

本书的核心部分是第四章中关于绕对称薄翼不可压缩位势流动的研究。虽然这个问题概念简单，仅涉及二维 Laplace 方程，却体现了正则摄动和奇异摄动问题的大部分特性。特别是，它可以引进处理奇异摄动问题的两种标准方法。因此，在以后各章中要一再提到这个基本问题。

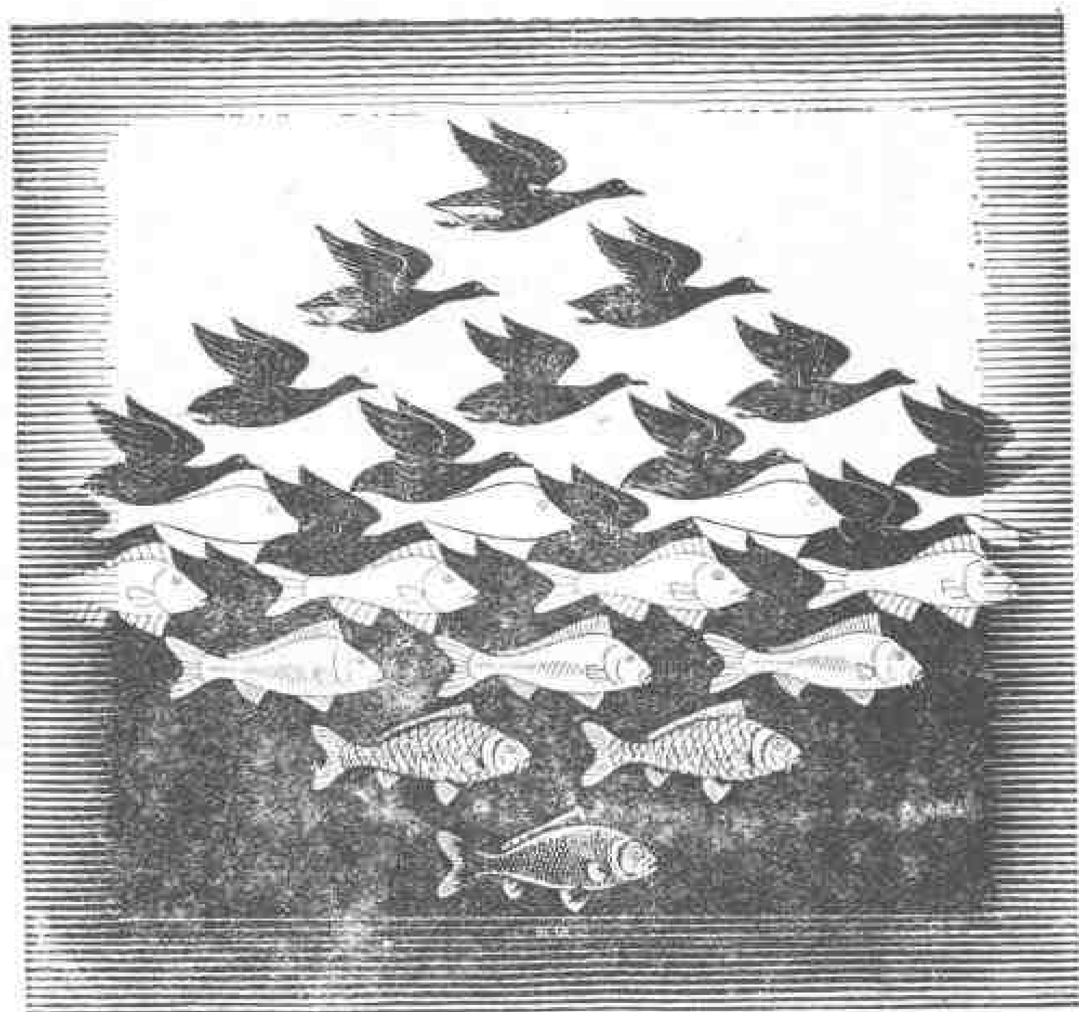
作者建议读者切勿忽视习题。这些习题简要地概括和引申了正文的内容，补充了很多细节，提引了进一步的参考文献。

作者首先要感谢 P. A. Lagerstrom。他不仅是本书所述解决奇异摄动问题两种主要方法中的一种的共同创始人之一，也是作者的师长、同事和朋友。书中提出的很多思想也是作者同 R. T. Jones、M. A. Heaslet 和他俩在 Ames 实验室的同事们多年合作的结晶。 作者很多别的同事，尤其是 O. Burggraf, I-Dee Chang, G. Emanuel, S. Kaplun, S. Nadir, B. Perry 和 A. F. Pillow 曾对本书提出过有益的批评和建议，谨此致谢。

M. 范戴克

Stanford, California

1964 年 5 月



天空与水(M.C. Escher, 1938)

这幅版画使人们对一种流动与另一种流动"平滑而难以觉察的融合"产生生动的印象．这种融合正是第五章所讨论的匹配渐近展开法的核心．

目　　录

第一章　摄动理论的性质

1.1　流体力学中的近似

流体力学这门学科，对于求解非线性偏微分方程起了先驱作用．同许多别的数学物理分支的基本方程不同，支配流体运动的方程基本上是非线性的(更确切地说,是拟线性的)．不管是否计及粘性和可压缩性，都是如此．唯一的重要例外是不可压缩无粘性流体的无旋运动．此运动导致 Laplace 方程,对这个问题已经研究得很充分了．如果不存在自由边界,其非线性性质仅以代数形式出现在 Bernoulli 方程中．

由于存在这种基本的非线性性质，在流体力学的各个分支中,精确解都是十分罕见的．它们通常是相似解．这时,利用高度的对称性，偏微分方程简化成常微分方程．即使对常微分方程必须用数值方法积分的情况，也很需要降格以求把这种解称为“精确解”． Lighthill (1948) 比较完整地罗列了可压缩无粘流的这类解：

(a) 绕凹角的定常超声速流动；

(b) 绕凸角的定常超声速流动；

(c) 绕不偏航圆锥的定常超声速流动；

(d) 无限平板对着静止空气的脉冲运动；

(e) 无限平板离开静止空气的脉冲运动；

(f) 静止空气中圆柱的均匀膨胀；

(g) 静止空气中圆球的均匀膨胀．

还可以根据 Schlichting 的书 (1960) 列出部分不可压缩粘性流动的这类解：

(a) 无限平行平板间，圆管内或同心圆筒间的定常流；

(b) 两块平板或两个同心圆筒间(均为一个固定，另一个平行地滑动)的定常流；

(c) 同心旋转圆筒间的定常流；

(d) 流向无限平板的平面流或轴对称流；

(e) 无限扁平圆盘的定常旋转运动；

(f) 两块扩张的平板间的定常平面流；

(g) 无限平板沿着其所在平面的脉冲运动或正弦振动。

在这些问题中，几何形状是理想化的，同有实际意义的大多数形状很不一样。这是上述这些相似流动的特点。

为了进一步研究，我们常常要用近似方法。(目前，另一条途径是编制电子计算机程序！)近似处理是一种技巧，有声望的科学家的名字，往往是同行之有效的近似方法联系在一起的：

Prandtl 机翼理论；

绕亚声速翼型流动的 Kármán- 钱学森方法；

亚声速流的 Prandtl-Glauert 近似；

亚声速流的 Janzen-Rayleigh 展开；

粘性流动的 Stokes 近似和 Oseen 近似；

Prandtl 的边界层理论；

边界层的 Kármán-Pohlhausen 近似；

高超声速流的 Newton-Busemann 理论。

在一些重要的领域里，还有待于人们去发现某种完全成功的近似方法。粘性分离流动和高超声速钝体绕流就是这类例子。

1.2 有理近似和无理近似

大多数有用的近似方法，适用于问题中一个(或几个)参

数(或变量)为小量(或大量)的情况．这种摄动量往往就是下列无量纲参数之一：

Janzen-Rayleigh 展开	Mach 数 ≪ 1
薄翼理论	厚度比 ≪ 1
升力线理论	展弦比 ≫ 1
Stokes, Oseen 流动	Reynolds 数 ≪ 1
边界层理论	Reynolds 数 ≫ 1
Newton-Busemann 理论	Mach 数 ≫ 1, $(\gamma-1)\ll 1$
准定常理论	约化频率 ≪ 1
自由分子流理论	Knudsen 数 ≫ 1

Garabedian (1956) 关于轴对称自由流线流动的分析，是一个异乎寻常的例子，它是以空间维数略不同于二的近似为基础的．我们称所有上述这些情况为参数摄动．摄动量也可以是无量纲形式的自变量之一：

边界层的 Blasius 级数	距离 ≪ 1
粘性流或可压缩流中的脉冲运动	时间 ≪ 1

我们称这种情况为坐标摄动．

随着摄动量趋近于零(或无穷大)，这种近似解就变得愈来愈精确．因此，它是一种渐近解．原则上，我们可以把它作为系统的逐步近似法的第一步来改进它的结果． 所得的级数，虽然不一定收敛，但就其结构来说，它是一种渐近展开．实际上，我们通常只要计算一阶近似，有时要计算二阶近似．二阶近似的主要用途，往往是帮助我们了解一阶近似，要算到五阶、六阶近似的情况极少．但是，能够这样继续无穷地算下去，这是具有根本意义的．我们称这种近似为有理近似 (rational approximation)．

另一方面，一些十分有用的近似解，在取任何已知的极限过程中，不会变成精确解．例如，

翼型的亚声速绕流的 Kármán-钱学森方法 (Liepmann 和 Puckett, 1947, p. 176);

激波-膨胀理论及其在轴对称、三维流动中的推广 (Hayes 和 Probstein, 1959, p 265);

跨声速流的 Spreiter 局部线性化近似 (Spreiter, 1959);

激波动力学的 Chester-Chisnell 理论 (Chester, 1960);

激波结构的 Mott-Smith 理论 (Mott-Smith, 1951).

我们称这类方法为无理近似 (irrational approximation). 除非通过进一步研究,发现了它们渐近性质的情况外,无理近似表示工作只能到此为止. 误差不论多大我们都得接受, 不能用逐步近似法来提高其精确度.

本书仅考虑有理近似, 故我们要讨论流体运动方程组的解关于某些小(或大)参数(或自变量)值的渐近展开式.

用 ε 来表示摄动量, 并作出适当定义使它为小量往往有其方便之处. 譬如说, 在边界层理论中, ε 可取为 Reynolds 数的倒数或 Reynolds 数平方根的倒数.

必须假定,当 ε 趋于零时,流动趋于一种极限状态. 这种极限状态可以称为基本解. 例如,大 Reynolds 数下, 绕大多数半无限物体的粘性流动趋于相应的无粘性流动。从边界层理论的思想来看,这种极限过程显然是非一致的。但是,对于出现边界层分离的物体而言, 我们还不知道适当的极限是什么,或者说,确实还不知道极限究竟是否存在 (参看 7.1 节).

在参数摄动问题中, 基本解往往是均匀平行流或其它平凡流动. 这时,我们通常可以把它看作"零阶近似",而称对它的主要摄动为"一阶近似"或"一阶解". 另一方面,在大多数坐标摄动问题中,基本解是整个方程组的非平凡解(如前面讨论过的相似流动之一), 通常就把基本解本身看作为一阶近似.

1.3 摄动展开的实例

可以列举一些典型的摄动展开式来说明上述一般性论述。研究人员经过辛勤计算，已经得到了这些摄动展开式的若干项。Janzen-Rayleigh 方法，即 M^2 展开法，通过对不可压缩流的基本解进行摄动来研究亚声速流的压缩性效应。一阶修正项正比于来流 Mach 数的平方，逐次展开成 M^2 的幂级数，就可以得到高阶近似。Simasaki (1956) 已经计算了无环量亚声速圆柱绕流级数解的前六项。当绝热指数 γ 为 1.405 时，他求得最大速度 q_{max}（发生在垂直于流动方向的直径两端表面上）同来流速度 U 的比值为(参看注 2)

$$\frac{q_{max}}{U}=2.00000+1.16667M^2+2.58129M^4+7.53386M^6+25.69342M^8+96.79287M^{10}+\cdots \tag{1.1}$$

如果流动完全是亚声速的，可以认为，这种方法得到了一个收敛级数 [Wendt(1948)在一篇报告中说，当 M^2 充分小时，收敛性已经得到证明，但此证明从未发表过]。实际上，根据上述级数系数的性态，当 M 接近于约为 0.40 的临界值时(这时，q_{max} 为声速)，该级数的收敛性似乎是值得怀疑的(参看习题 10.6)。

在薄翼和细长体理论中，扁平或细长物体的解是对均匀流的摄动。Hantzsche (1943) 对厚度比为 ε 的椭圆翼型，计算了零攻角下在亚声速可压缩流中的薄翼展开式，他求出最大速度为

$$\frac{q_{max}}{U}=1+\frac{1}{\beta}\varepsilon+\frac{M^2}{2\beta^3}(1+\Gamma)\varepsilon^2+\frac{M^2}{\beta^3}\left\{\frac{\pi}{4}\left[1+\frac{1}{2}\Gamma(1+\Gamma)(8-M^2)\right]-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\Gamma-\frac{4}{3}\Gamma^2\right\}\varepsilon^3$$

$$+ \frac{M^4}{2\beta^3}\left[1 + \frac{1}{2}\Gamma(1+\Gamma)(8-M^4)\right]\varepsilon^4 \log \varepsilon$$
$$+ O(\varepsilon^4) \tag{1.2a}$$

式中

$$\beta = \sqrt{1 - M^2}, \quad \Gamma = \frac{\gamma + 1}{4}\frac{M^2}{\beta^2} \tag{1.2b}$$

在这里和全书中，log 指的是自然对数．正如许多摄动问题那样，在 (1.2a) 式中出现摄动量的对数项是出乎意料的．上式的下一未知项是 ε^4 阶的．由于在 10.5 节中所述的理由，它应该同 $\varepsilon^4 \log \varepsilon$ 阶的项一起被包括到四阶近似中去．

在小 Reynolds 数下，绕过三维物体的粘性流动可用 Stokes 近似来描述．对于前后对称的物体，可以用 Oseen 近似较准确地估算其阻力．Goldstein (1929) 计算了圆球 Oseen 阻力级数的六项．阻力系数用以半径为特征长度的 Reynolds 数 $R = \frac{Ua}{\nu}$ 来表达，其结果为 (参看注 2)

$$C_D \equiv \frac{D}{\rho U^2 a^2} = \frac{6\pi}{R}\left(1 + \frac{3}{8}R - \frac{19}{320}R^2 + \frac{71}{2560}R^3 - \frac{30179}{2150400}R^4 + \frac{122519}{17203200}R^5 + \cdots\right) \tag{1.3}$$

这里，最后一项的系数已为 Shanks (1955) 校正．完全 Navier-Stokes 方程的解，从第三项起就同 Oseen 近似不一样了．根据 Proudman 和 Pearson (1957) 的工作，得出(参看注 10)

$$C_D = \frac{6\pi}{R}\left[1 + \frac{3}{8}R + \frac{9}{40}R^2 \log R + O(R^2)\right] \tag{1.4}$$

在大 Reynolds 数下，Prandtl 的边界层方程描述了紧贴物面处的粘性流动．因为这些方程是非线性的，往往还要进一步作近似．Blasius 最先对任意对称，光滑的二维物型以离开

驻点小距离进行坐标摄动．Tifford (1954) 用这个方法计算到第六项，得到的抛物柱的局部摩阻系数为 (Van Dyke, 1964a) (参看注 12)

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{2}{\sqrt{R}}$$
$$\times \left[1.23259\frac{x}{a} - 1.93186\left(\frac{x}{a}\right)^3 + 3.11051\left(\frac{x}{a}\right)^5 - 5.02892\left(\frac{x}{a}\right)^7 + 8.14109\left(\frac{x}{a}\right)^9 - 13.18662\left(\frac{x}{a}\right)^{11} + \cdots\right] \tag{1.5}$$

其中，x 为沿着物体表面的距离，R 仍是以头部半径 a 为特征长度的 Reynolds 数。

可以用 Prandtl 升力线理论近似地描述大展弦比为 A 的薄翼不可压缩绕流。 第九章讨论了其高阶近似的计算方法，椭圆机翼升力曲线的斜率 (Van Dyke, 1964b) 为(参看注 13)

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = 2\pi\left[1 - \frac{2}{A} - \frac{16}{\pi^2}\frac{\log A}{A^2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{7}{2} + \pi^2 - 4\log\pi\right)\frac{1}{A^2} + \cdots\right] \tag{1.6}$$

在 Newton-Busemann 近似中，人们用展开成 $\frac{1}{M^2}$ 和 $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ 的級级数的方法，着手研究绕钝体的高超声速流动，这是众所周知的难题． Chester (1956b) 计算了产生旋转抛物面形状激波的旋成体情况，级数的项数他算得最多． 当

$M=\infty$时，他求出激波脱体距离Δ同头部半径 b 之比为

$$\frac{\Delta}{b}=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}-\sqrt{\frac{8}{3}}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{3/2}+\frac{13}{5}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{2}$$
$$-\frac{463}{168}\sqrt{\frac{8}{3}}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{5/2}+\cdots \qquad (1.7)$$

在以后各章中，我们还要对上述例子作进一步讨论.

1.4 正则摄动和奇异摄动问题

在最顺利的情况下，摄动解可以得到完全令人满意的结果. 往往不能认为级数总是收敛的. 对于参数摄动来说，尤其是如此. 但是，解的渐近性质表明：只要 ε 适当小，计算几项便可在流场中处处达到足够的精确度. 譬如说，低于临界 Mach 数时，Janzen-Rayleigh 展开式的这种一致有效性看来是确凿无疑的. 我们就称这类问题为正则摄动问题.

另一方面，我们会发现，直接摄动解并非在整个流场中是一致有效的. 在大 Reynolds 数下的无分离粘性流动，这是众所周知的例子. 这时，对无粘性流动的基本解进行摄动在物体表面附近失效了，必须辅之以边界层近似. 在这种情况下，不仅一阶近似局部失效，而且在高阶近似中也会有这种困难(如果还能计算高阶近似的话). 所以，在非一致性区域内，解的性质不是愈来愈好，而是愈来愈坏. 这时，我们就称这类问题为奇异摄动问题.

在流体力学中，奇异摄动问题经常出现. 随着必要的数学方法的发展，在近期文献中对奇异摄动问题的研究与日俱增. 即使是对一些经典问题，一旦认识到它们的奇异性质后，人的思想就会豁然开朗，产生新的见解. 基于上述这些原因，本书主要讨论奇异摄动问题.

为了研究奇异摄动问题，最近提出了两种相当一般的方

法．一种是边界层理论概念的拓广，叫匹配渐近展开法；另一种是 Poincaré 思想的引伸，叫变形坐标法．关于这两种方法合理性的数学证明，还处在萌芽状态．因此，还不能确切地回答：什么时候可以使用哪种方法？对于某一给定的问题，用哪种方法更好些？这两种方法间又有什么联系？不过，我们试图通过研究某些能说明问题的例子，以便对上述这些问题有所了解．在某些实例中，将用常微分方程作为简单的模型来说明要点．但是只要有可能，我们就从流体力学的近期文献中选取例子，这样一来，我们通常就要涉及偏微分方程了．

因为我们所研究的，是有普遍应用的那些方法，所以，正像已经引用的那些结果一样，所举的例子既有无粘性流的，也有粘性流的；速度范围从不可压缩直到高超声速．我们假定读者已经了解用来说明数学方法的那些问题的物理背景．作者还希望读者熟悉分析的基本方法，偏微分方程的基本理论和复变函数论的基本概念（特别是，用解析延拓方法完整地描述一个解析函数这个极其重要的基本概念）．

第二章　正则摄动问题

2.1　引言；绕圆柱的基本流动

我们首先考虑若干互有关联的正则摄动问题，以说明摄动理论的某些方法．下面一章还要把这些方法系统化．因奇异摄动引起的复杂性，则要放到以后各章中去讨论．

由于精确解很罕见，所以人们珍视它，并尽可能充分地利用它．于是，一个精确解往往用若干方式进行摄动，以便考察各种不同的效应．对于绕过物体的无界流动这一极为平常的空气动力学问题，我们可以进行如下摄动：

(i)　上游无穷远处的边界条件；

(ii)　物体表面上的近处边界条件；

(iii)　运动方程．

对上述每一种可能情况，又可依次用种种不同的方式来进行．譬如，绕圆锥的超声速流动的精确无粘解可用（i）的方式进行摄动来研究下述效应：

(a)　攻角（Stone, 1948）；

(b)　俯仰运动（Kawamura 和 Tsien, 1964）．

以（ii）的方式摄动来研究以下影响：

(c)　弹体头部初始曲率（Cabannes, 1951）；

(d)　对圆形横截面的偏差（Ferri 等，1953）；

(e)　小钝头（Yakura, 1962）．

以（iii）的方式摄动，可以考虑

(f)　小粘性（Hantzsche 和 Wendt, 1941）的影响．

为了说明上述几种可能情况，而又不需进行过多的计算，

我们取无环量的不可压缩、无粘性圆柱绕流这一定常平面流动为基本解(图 2.1)．讨论时，不仅使用速度势，而且使用流函数是适宜的，因为下面我们还要研究有旋流，这时就不存在速度势了．

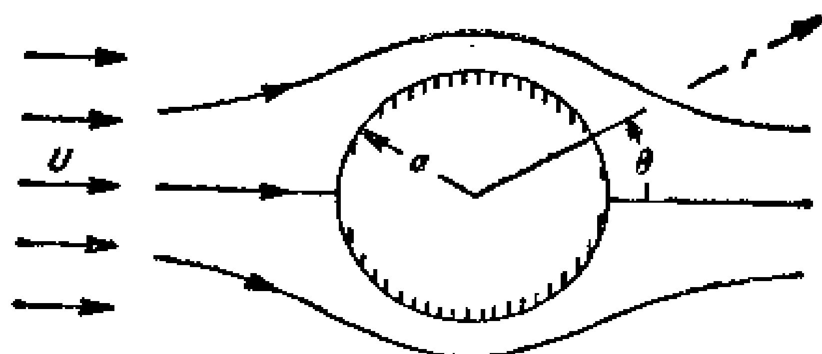


图 2.1　基本的不可压缩圆柱绕流．

对于不可压缩平面流动，在笛卡儿坐标系中流函数可由下式定义：

$$d\psi = u\,dy - v\,dx \tag{2.1}$$

无粘运动的流函数满足微分方程

$$\nabla^2\psi = -\omega(\psi) \tag{2.2}$$

它表达了没有粘性时沿着流线的涡量为常数这一物理事实．除了涡量 $\omega(\psi)$ 是 ψ 的线性函数的情况之外，这是一个非线性方程．对于均匀来流，上游远处的涡量等于零，留下的项为 Laplace 方程

$$\psi_{rr} + \frac{\psi_r}{r} + \frac{\psi_{\theta\theta}}{r^2} = 0 \tag{2.3a}$$

在这里以及全书中，下标用来表示偏导数．边界条件为

上游：$\psi(r,\theta) \to Ur\sin\theta$　　（当 $r\to\infty$）　(2.3b)

物面上：$\psi(a,\theta) = 0$　　(2.3c)

还有使环量为零的某个条件，譬如，要求流场对于 $\theta = 0$ 射线是对称的，即

$$\psi(r,\theta) = -\psi(r,-\theta) \tag{2.3d}$$

上述问题的解由均匀流动加上放置在圆心处的偶极子来确定：

$$\psi_0(r, \theta) = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta \qquad (2.4a)$$

相应的速度势为

$$\phi_0(r, \theta) = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta \qquad (2.4b)$$

它们当然可以组合成复数形式的表达式

$$\phi_0 + i\psi_0 = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right), \quad z = re^{i\theta} \qquad (2.4c)$$

2.2 弱剪切流的圆柱绕流

首先考虑上游远处边界条件的微小摄动。设来流是平行流，它的涡量为小常数（图 2.2)，其速度为

$$\psi_{\infty y} = U\left(1 + \varepsilon\frac{y}{a}\right) = U\left(1 + \varepsilon\frac{r}{a}\sin\theta\right) \qquad (2.5a)$$

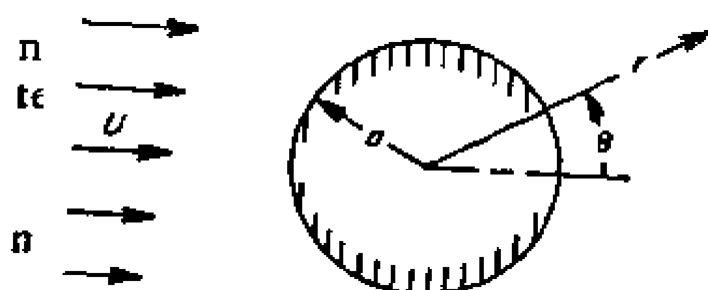


图 2.2 圆柱的弱剪切绕流.

所以，这种流动的流函数（准确到一个常数）为

$$\psi_\infty = U\left(y + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{y^2}{a}\right)$$

$$= U\left[r\sin\theta + \frac{1}{4}\varepsilon\frac{r^2}{a}(1 - \cos 2\theta)\right] \qquad (2.5b)$$

其涡量为

$$\omega_\infty = -\nabla^2\psi_\infty = -\varepsilon\frac{U}{a} \tag{2.5c}$$

因此,整个问题化为

$$\psi_{rr} + \frac{\psi_r}{r} + \frac{\psi_{\theta\theta}}{r^2} = \varepsilon\frac{U}{a} \tag{2.6a}$$

$$\psi \to U\left[r\sin\theta + \frac{1}{4}\varepsilon\frac{r^2}{a}(1 - \cos 2\theta)\right]$$

$$(\text{当 } r \to \infty \text{ 时}) \tag{2.6b}$$

$$\psi(a, \theta) = 0 \tag{2.6c}$$

为了得到唯一解,必须补充,譬如说,物体不引起附加环量的要求.

如果无量纲"涡量" ε 是小量,其流场很可能同上节所述的无旋运动的解差别不大。根据这个假设,我们暂且令

$$\psi(r, \theta; \varepsilon) = \psi_0(r, \theta) + \varepsilon\psi_1(r, \theta) + \cdots \tag{2.7}$$

其中 ψ_0 是基本解 (2.4a)。把式 (2.7) 代入描述整个问题的式(2.6) 中,令 ε 的同次幂项相等,便得一阶摄动问题:

$$\psi_{1rr} + \frac{\psi_{1r}}{r} + \frac{\psi_{1\theta\theta}}{r^2} = \frac{U}{a} \tag{2.8a}$$

$$\psi_1 \to \frac{1}{4}\frac{U}{a}r^2(1 - \cos 2\theta) \quad (\text{当 } r \to \infty \text{时}) \tag{2.8b}$$

$$\psi_1(a, \theta) = 0 \tag{2.8c}$$

在这个简单的问题中,上游远处流动的有旋部分给出了计及微分方程 (2.8a) 右边非齐次项的特解,所以,把解表达为如下形式是适宜的:

$$\psi_1(r,\theta) = \frac{1}{4}\frac{U}{a}r^2(1 - \cos 2\theta) + \chi_1(r, \theta) \tag{2.9}$$

找到特解以后,微分方程就化为齐次形式(即 Laplace 方程,而不是 Poisson 方程),而齐次解 (Complementary solution) χ_1 满足如下问题:

$$\chi_{1rr} + \frac{\chi_{1r}}{r} + \frac{\chi_{1\theta\theta}}{r^2} = 0 \tag{2.10a}$$

$$\chi_1 \to \text{常数} \qquad (\text{当 } r \to \infty \text{ 时}) \tag{2.10b}$$

$$\chi_1(a, \theta) = -\frac{1}{4} U_a(1 - \cos 2\theta) \tag{2.10c}$$

这同基本问题 (2.3) 一样，很容易用分离变量法求解，它仍然只有一个无环量的唯一解。然后把上述结果归纳起来，便可得完整的一阶解

$$\psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta + \frac{1}{4}\varepsilon U\left[\frac{r^2}{a}(1 - \cos 2\theta) + \frac{a^3}{r^2}\cos 2\theta - a\right] \tag{2.11}$$

基本解由均匀流(无穷远处的偶极子)加上它在圆中的映象(在原点处的偶极子)所组成。类似地，一阶摄动则由来流有旋部分及其在圆中的映象和常数项组成，这个常数可用来调整流函数使它在物面上等于零。

通常我们在这个方程后面写上"$+\cdots$"或"$+O(\varepsilon^2)$"，以强调这个结果对于小的 ε 只准确到一阶。但是，对这个非典型的情况，摄动展开式至此截止；这个解就是精确解 [参看 Lamb，1932，p. 235方程 (23)]。但对于其他任何一种上游流动，问题是非线性的，摄动解将是 ε 的无限项幂级数(参看习题 2.4)。

作为研究剪切效应对尾流或边界层中总压管(Pitot 管)读数影响的模型，Hall (1956) 考虑了这个解。不难证明，驻点流线 $\psi = 0$ 从上游 $y \approx \frac{1}{4}\varepsilon a$ 处出发，因此所测得的驻压高于正上游处的驻压，即总压管的读数过高。实验已经观测到这种效应。Hall 还讨论了对于圆球的剪切绕流，但这个问题就复杂多了。

2.3 微小变形圆柱的绕流

下面，考虑物体表面上边界条件的摄动．这就引进了上例中没有出现过的摄动理论的某些特性．设物体(图 2.3) 由方程

$$r = a(1 - \varepsilon \sin^2\theta) \tag{2.12}$$

来描述，它可看作椭圆的一阶近似，也可看作一条更复杂的曲线的精确描述．

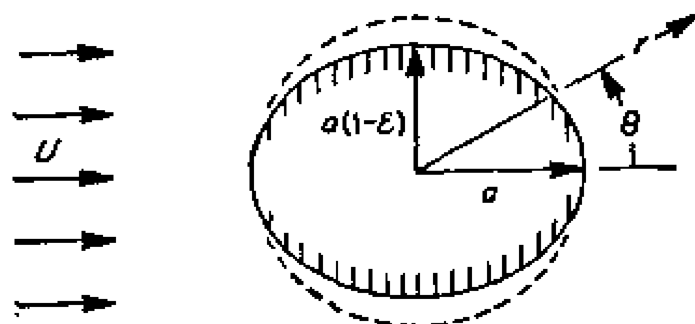


图 2.3 均匀来流绕微小变形圆柱的流动.

同前面一样，我们暂且设一个 ε 幂级数形式的摄动展开式

$$\phi(r, \theta; \varepsilon) = \phi_0(r, \theta) + \varepsilon\phi_1(r, \theta) + \cdots \tag{2.13}$$

把它代入完整的问题中去．对于运动方程 (2.3a) 和上游边界条件 (2.3b)，我们仍可让 ε 的同次幂相等，由头两项即得

$$\nabla^2\phi_0 = 0, \quad \phi_0 \to Ur\sin\theta \quad (\text{当 } r \to \infty) \tag{2.14a}$$

$$\nabla^2\phi_1 = 0, \quad \phi_1 \to 0 \quad (\text{当 } r \to \infty) \tag{2.14b}$$

但是，在物体表面上切向流动条件就要复杂一些，它可精确地写为

$$\phi_0[a(1 - \varepsilon\sin^2\theta), \theta] + \varepsilon\phi_1[a(1 - \varepsilon\sin^2\theta), \theta] + \cdots = 0 \tag{2.15a}$$

这里，摄动参数 ε 既以显式出现，又隐含在各函数的第一个自变量中，所以不能直接让 ε 的同次幂等于零．只有把函数展开成依赖于 ε 的显式才能这样做． 如果我们假定 ϕ_1 象 ϕ_0 一样

是 r 的解析函数，我们可在 $r=a$ 附近把它们展开成 Taylor 级数。仅保留 ε 的线性项，得到

$$\psi_0(a,\theta)-\varepsilon a\sin^2\theta\psi_{0r}(a,\theta)+\varepsilon\psi_1(a,\theta)+\cdots=0 \tag{2.15b}$$

现在可以让 ε 同次幂相等，得到

$$\psi_0(a,\theta)=0 \tag{2.16a}$$

$$\psi_1(a,\theta)=a\sin^2\theta\psi_{0r}(a,\theta)=\frac{1}{2}Ua(3\sin\theta-\sin 3\theta) \tag{2.16b}$$

式 (2.16b) 的最终形式由基本解 ψ_0 的式 (2.4a) 得到。

现在，摄动问题 (2.14b)，(2.16b) 同基本问题具有相同的形式，因此同样不难求解。于是，完整的一阶近似为

$$\psi=U\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta+\frac{1}{2}\varepsilon U\left(3\frac{a^2}{r}\sin\theta-\frac{a^4}{r^3}\sin 3\theta\right)+O(\varepsilon^2) \tag{2.17}$$

通常，物体表面上的 ψ 值最重要，可以简单地令 r 等于它在表面上的数值 (2.12) 来求得。但是，略去无关紧要的高阶项来简化所得的结果，这是同已经引进的近似是一致的。还是在基本值 $r=a$ 附近展开成 Taylor 级数便可达到这一目的。这样，我们就得到了，譬如，表面速度的表达式

$$q_s=U(2\sin\theta+\varepsilon\sin 3\theta+\cdots) \tag{2.18}$$

2.4 稍可压缩流体绕圆柱的流动

现在来考虑运动方程的摄动。假定流体是稍可压缩的，来流 Mach 数是小量。因为流函数同速度之间的关系由于密度发生变化而复杂化了，所以用速度势来解问题方便些。设速度向量为 $\boldsymbol{q}=U\mathrm{grad}\phi$，于是，对于完全气体的平面流动，完整的速度势方程为 (Oswatitsch, 1956, p.328)

$$\phi_{xx}+\phi_{yy}=M^2\Big[\phi_x^2\phi_{xx}+2\phi_x\phi_y\phi_{xy}+\phi_y^2\phi_{yy}+\frac{\gamma-1}{2}(\phi_x^2+\phi_y^2-1)(\phi_{xx}+\phi_{yy})\Big] \tag{2.19a}$$

其中 M 为来流 Mach 数．把这个方程变换成极坐标形式，可得

$$\phi_{rr}+\frac{\phi_r}{r}+\frac{\phi_{\theta\theta}}{r^2}=\frac{1}{2}M^2\Big[\Big(\phi_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\phi_\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)\times\Big(\phi_r^2+\frac{\phi_\theta^2}{r^2}\Big)+(\gamma-1)\Big(\phi_r^2+\frac{\phi_\theta^2}{r^2}-1\Big)\times\Big(\phi_{rr}+\frac{\phi_r}{r}+\frac{\phi_{\theta\theta}}{r^2}\Big)\Big] \tag{2.19b}$$

为方便起见，选择长度尺度使圆柱半径为1，于是，边界条件为

上游：$\phi\to r\cos\theta$ （当$r\to\infty$） (2.20a)

物面上：$\phi_r(1,\theta)=0$ (2.20b)

还要加上环量为零的对称性要求。

我们借此机会说明求逐步近似解的另外一种方法，即**迭代法**，而不象前面那样假定一个摄动展开式．为此，把代表可压缩性效应的所有项都移到微分方程的右边去．把这些项都略去便导出不可压缩流的基本解，这个解由式(2.4b)中令 $U=a=1$ 得到．为了计算可压缩性一阶效应，我们用基本解来估计右边的非线性项，再进行求解．这时微分方程成为

$$\phi_{1rr}+\frac{\phi_{1r}}{r}+\frac{\phi_{1\theta\theta}}{r^2}=2M^2\Big[\Big(\frac{1}{r^2}-\frac{2}{r^5}\Big)\cos\theta+\frac{1}{r^3}\cos3\theta\Big] \tag{2.21}$$

在迭代过程中，每一步都要计算完整的解，而不是只计算前一步结果的小的修正量，这样做有其方便之处．所以，每一步都要加上完整的边界条件(2.20)．我们不用阿拉伯数字而采用

罗马数字作下标来表示这种逐步近似解，以示区别．我们发现，微分方程中含（$\gamma-1$）的项对一阶近似 Φ_1 没有影响，即可压缩性一阶效应同气体的热力学性质无关．

按照 Rayleigh（1916）的方法，通过分离变量，我们求得了迭代方程（2.21）在无穷远处等于零的特解：

$$\phi_{II}=M^2\left[\left(\frac{1}{12r^5}-\frac{1}{2r^3}\right)\cos\theta-\frac{1}{4r}\cos 3\theta\right] \qquad (2.22)$$

还必须加上一个齐次方程（即 Laplace 方程）的解以满足原边界条件．最后得到的结果为

$$\phi_1=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+M^2\left[\left(\frac{13}{12}\frac{1}{r}-\frac{1}{2r^3}+\frac{1}{12r^5}\right)\cos\theta+\left(\frac{1}{12r^3}-\frac{1}{4r}\right)\cos 3\theta\right] \qquad (2.23)$$

由此式计算最大表面速度，再次可得到第一章所引用的 Simasaki 级数（1.1）的前两项．

重复这种迭代过程可以得到高阶近似，唯一的困难是计算工作量以惊人的速度骤增．可以用复变函数论方法，并有条理地安排计算步骤把工作量减少到最低限度（参看注 2）．

2.5 小粘性的影响

我们可以采用与处理可压缩性一样的方法来处理粘性的影响．这时使用流函数是适宜的，对平面不可压缩流，该流函数满足方程

$$\left(\psi_y\frac{\partial}{\partial x}-\psi_x\frac{\partial}{\partial y}\right)\nabla^2\psi=\nu\nabla^4\psi \qquad (2.24)$$

这里 ν 是运动粘性系数．如果我们再引进无量纲变数使 $U=a=1$，ν 就可用 R^{-1} 来代替，其中 $R=\frac{U_a}{\nu}$ 是以半径为特征长度的 Reynolds 数． 这个方程表示这样一个物理事实：涡

量一方面以当地速度进行对流(方程左边)，同时因粘性而发生扩散(方程右边)。

当 Reynolds 数为无穷大时，方程右边为零，这就导出 ψ 的方程 (2.2)。这样一来，在此极限下基本无粘解 (2.4a) 就成为精确解了。假如我们要用迭代法获得大 Reynolds 数情形的摄动解，方程应变换成极坐标形式，并加上物面上无滑流条件。不过，不需进行详细计算，显然可知迭代法一定行不通。因为用基本解来计算时，右边项等于零，所以问题中不再包含 Reynolds 数了。

当然，由于 Prandtl 的边界层理论使我们摆脱了困境。微小可压缩性和小粘性问题，尽管表面上看来两者很相似，但它们本质上是截然不同的。因为对前者说来，基本解在流场中是处处有效的近似解；而对后者说来，不管 Reynolds 数多大，在物面附近基本解不适用。因此，微小的可压缩性效应是一种正则摄动，而小粘性效应则是一种奇异摄动。

2.6 边界层的坐标展开

在下面几章将讨论奇异摄动问题和边界层理论的基本概念。现在大致回顾一下 Prandtl 的众所周知的结果是有益的。在大 Reynolds 数下，粘性仅在物体表面附近的薄层里是重要的，在这一薄层中，ψ 的方程 (2.24) 可以近似地化为

$$\psi_y\psi_{xy} - \psi_x\psi_{yy} = \nu\psi_{yyy} + q\frac{dq}{dx} \tag{2.25a}$$

这里，x 和 y 为沿着物体表面和垂直于物体表面的曲线坐标(图 2.4)。显然，已经对 y 进行过一次积分，把四阶方程化成了三阶方程。最后一项是积分函数，q 是无粘流的表面速度。

根据物面上速度为零的要求，给出两个边界条件：

$$\psi(x,0) = \psi_y(x,0) = 0 \tag{2.25b}$$

第三个条件，即在边界层外缘达到无粘流的表面速度，可

以写成

$$\lim_{y\to\infty} \phi_y(x, y) = q \tag{2.25c}$$

这里 $y\to\infty$ 应理解为仅以边界层厚度那样的小尺度为基准远离物体表面的意思。

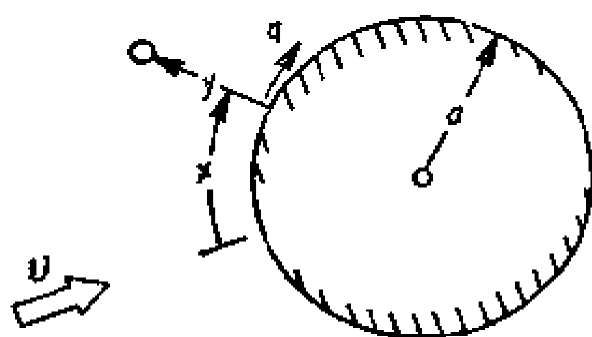


图 2.4 圆柱的边界层坐标.

上述这些例子都是参数摄动。现在我们来考虑圆柱上边界层的坐标摄动。在 Prandtl 边界层理论范围内，它还是一个正则摄动问题。

假定离开驻点的距离 x 同圆柱半径 a 相比是小量。于是，流函数可以展开成 $\frac{x}{a}$ 的幂级数。从对称性条件显然可知：级数中仅出现奇次幂的项。为方便起见，可把展开式写成

$$\phi = \sqrt{2Ua\nu}\left[\frac{x}{a} f_1(\eta) - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 f_3(\eta) + \cdots\right],$$

$$\eta = y\sqrt{\frac{2U}{\nu a}} \tag{2.26}$$

这是 Blasuis 级数 (Schlichting, 1960, p. 146) 的标准形式。从基本解可取无粘流表面速度为

$$q = 2U\sin\frac{x}{a} = 2U\left[\frac{x}{a} - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \cdots\right] \tag{2.27}$$

把它代入边界层问题 (2.25)，令 $\frac{x}{a}$ 的同次幂项相等，可得到一系列包含常微分方程的问题：

$$f_1''' + f_1 f_1'' - f_1'^2 + 1 = 0,\quad f_1(0) = f_1'(0) = 0,$$
$$f_1'(\infty) = 1, \tag{2.28a}$$
$$f_3''' + f_1 f_3'' - 4f_1' f_3' + 3f_1'' f_3 + 1 = 0,$$

$$f_3(0) = f_3'(0) = 0 \quad f_3'(\infty) = \frac{1}{4} \tag{2.28b}$$

其中第一个问题是关于驻点附近平面粘性流的经典的 Hiemenz 问题，其余问题是对它的线性摄动。

由数值积分（Tifford, 1954）得出 $f_1''(0) = 1.2325877$，$f_3''(0) = 0.7244473$，因此表面摩阻系数的展开式为

$$C_f \equiv \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{1}{\sqrt{R}}\left[6.973\frac{x}{a} - 2.732\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \cdots\right] \tag{2.29}$$

它在 $\frac{x}{a} = 1.6$ 处为零，这表示边界层在离驻点约 92° 处从圆柱表面发生分离。虽说级数再计算四项这个估计值改进为 109° (Schlichting, 1960, p. 154)，但是由于发生了分离现象，使我们的整个分析都不适用了。因分离现象所产生的宽大的尾迹严重地改变了物体前部的流动图象。因此在那里虽然 Prandtl 边界层方程 (2.25a) 仍然有效，无粘流的表面速度 q 却不能由式 (2.27) 正确地给定，而是未知的(图 7.1)。实验证明：实际上约在 81° 处发生分离。

Blasuis 级数仅对于不发生分离现象的解是自洽的。均匀来流的抛物柱绕流就是一例，第一章的方程 (1.5) 是这个问题相应于式 (2.29) 的前六项结果。

习　　题

2.1　脉动圆柱. 考虑不可压缩无粘液体对于圆柱的均匀平面绕流，该圆柱半径随着时间按 $a[1 + \varepsilon f(t)]$ 规律发生微小的变动。试计算到 ε 阶的速度势，并求其流函数，证明它在物体表面上不等于零.

2.2　稍可渗透的圆柱. 不可压缩无粘液体对于空心圆柱的均匀绕流，圆柱表面上垂直地钻了许多小孔使它能够渗水。假定表面法向速度为

某个小参数 ε 乘以外表面压力系数同内部压力系数之差（设内部压力为常数），且通过表面的总流量为零. 试近似地计算准确到 ε 阶的外流的流函数和内部压力，并通过物理上的论证，验证所得结果的符号. 如果仅保留 ε 和 M^2 的线性项，对于稍可压缩流的相应结果是什么？（参看注 3）

2.3 波纹形准圆柱. 考虑半径为 $a\left[1+\varepsilon\sin\left(\frac{z}{b}\right)\right]$ 的无限长圆柱(图 2.5)，试近似地计算垂直于轴的(无环量)均匀不可压缩绕流的三维速度势. 这里仅要求保留 ε 的线性项. 对于波长很长只要保留 a/b 线性项的情况，试用 Bessel 函数的展开式简化所得到的解，并作为准二维流来解释这个结果. 试证：在 a/b 很大这一相反的极限情况下，在表面附近的摄动解是二维调和函数，而 θ 仅作为参数出现，并从物理上论证这一结论(参看注 3)

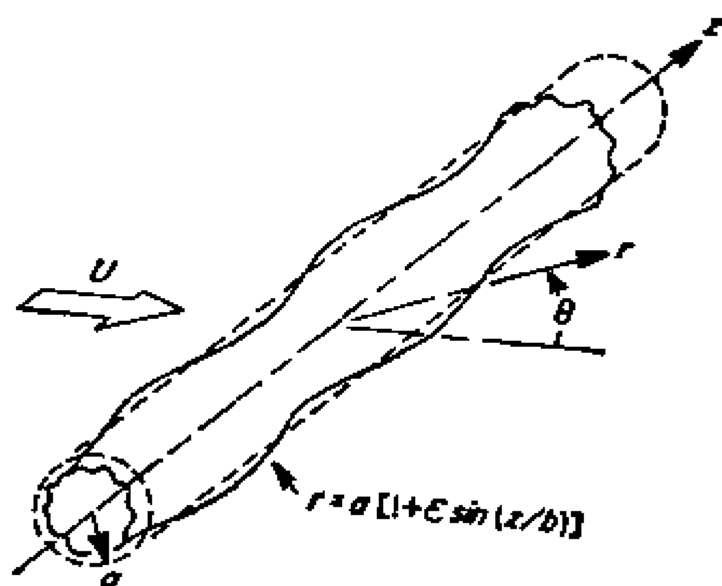


图 2.5 无限长波纹形圆柱.

2.4 抛物形速度分布剪切流中的圆柱绕流. 一个半径为 a 的圆柱对称地放置在不可压缩无粘平行流中，其速度为抛物线分布 $u=U\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\frac{y^2}{a^2}\right)$. 试求涡量 $\omega(\psi)$ 的精确隐式解，展开 ω 并保留 ε^4 阶项，给出 ω 的级数形式解. 试用摄动法求解流场，说明在求 ε 阶项时会遇到困难，因为这时找不到使物体的上游远处的扰动速度等于零的解(参看注3).

第三章　摄动理论的方法

3.1　引言；极限过程

我们已用前一章的例子，介绍了处理摄动问题的各种方法．现在要将那些常用的方法进行归纳和分类．首先讲符号、定义以及有关的分析过程．

我们所关心的是，寻求流体运动方程的近似解，它们在某种实用意义上是接近于精确解的．这就要涉及各种相等的概念．按照恒等程度递减的次序，它们可用下述记号来表达：

$$
\begin{array}{ll}
\equiv & \text{恒等} \\
= & \text{等于} \\
\sim & \text{渐近于(在某一给定的极限过程下)} \\
\approx & \text{近似于(在任何实用意义上)} \\
\propto & \text{正比于}
\end{array}
\tag{3.1}
$$

如第一章所述，我们研究同极限过程有关的近似解．当摄动量趋于零或某个临界值时结果就是精确解了．人们常常遇到双重或多重极限过程，这时，两个或两个以上摄动量同时趋于它们的极限值．由于有些极限过程的次序通常是不可交换的，人们往往要规定趋于极限值的相对速率，这种规定就给我们提供了该问题的相似参数．

下面是大家所熟悉的一些例子：

(a) 厚度比为 ε 的机翼的平面跨声速小扰动理论（Von Kármán, 1947）：

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon\to 0\\ M\to 1\end{array}\right\}\qquad \frac{M-1}{\varepsilon^{2/3}}=O(1)$$

(b) 厚度比为 ε 的物体的高超声速小扰动理论 (Hayes 和 Probstein, 1959, p. 36):

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon \to 0 \\ M \to \infty\end{array}\right\} \qquad \frac{1}{M\varepsilon} = O(1)$$

(c) 高超声速钝体绕流的 Newton-Busemann 近似 (Cole, 1957):

$$\left.\begin{array}{l}M \to \infty \\ \gamma \to 1\end{array}\right\} \qquad \frac{1}{(\gamma - 1)M^2} = O(1)$$

(d) 厚度比为 ε 的细长体高超声速小扰动形式的 Newton-Busemann 近似 (Cole, 1957):

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon \to 0 \\ M \to \infty \\ \gamma \to 1\end{array}\right\} \qquad \frac{1}{(\gamma - 1)M^2\varepsilon^2} = O(1)$$

有人可能已预料到最后一个例子会有两个相似参数，但我们发现，仅其中之一是重要的.

摄动量绝非是唯一确定的．譬如，可以取厚度比、最大斜率、平均斜率等为细长体的厚度参数．正如 Reynolds 数不以直径为特征长度而以半径为特征长度一样，摄动量当然也可改变一个常数因子．我们应该随时注意利用这种自由选择的可能性，采用在某些方面较为有利的摄动量来取代明显的选择．因为这种可能性太多了，所以没有什么规律可以依循．这里，我们只能列举一些例子来告诉人们应如何选择摄动量，这些例子往往是从错误的想法中得到启示，从而巧妙地选取摄动量，才使结果得到简化和改进的:

(a) 在跨声速小扰动理论中，取 $M^2 - 1$，而不取 $M - 1$，这样一来使结果在邻近的亚声速和超声速范围内依然成立 (Spreiter, 1953);

(b) 在高超声速小扰动理论中，取 $1/\sqrt{M^2-1}$，而不取 $1/M$，使结果在邻近的超声速范围内依然成立 (Van Dyke, 1951);

(c) 在高超声速流的 Newton-Busemann 近似中，以 $\gamma-1/\gamma+1$ 取代 $\gamma-1$，因为它等于强激波前后的密度比 (Hayes 和 Probstein, 1959, p. 7);

(d) 小 Reynolds 数下绕圆柱的粘性流动用 $\left(\log R/4+\gamma-\frac{1}{2}\right)$ 代替 $\log R$(γ 为 Euler 常数)，因为这样一来，可将 Stokes 展开式的头两项归并成一项 (Kaplun, 1957; 参看 8.7 节);

(e) 在超声速流中钝体脱体激波的脱体距离的 Newton-Busemann 近似中，取 $\varepsilon/(1-\varepsilon)$ 代替 ε，其中 ε 为正激波前后的密度比．因为当 $M\to 1$ 时，它趋于无穷，实际情况应该如此 (Serbin, 1958);

(f) 在大 Reynolds 数下，层流中钝体的阻力用 $(A+BR^{-1/2}+\cdots)^2$ 代替 $(A^2+2ABR^{-1/2}+\cdots)$，该摄动参数的选择是从理论得到启示的，并同已知的结果十分符合(Imai, 1957b);

(g) 对于大展弦比为 A 的椭圆机翼，其升力曲线的斜率，取 $2\pi/(1+2/A+\cdots)$代替 $2\pi(1-2/A+\cdots)$，因为这时便可象实际情况那样，当 $A\to 0$ 时它等于零(参看第九章);

(h) 在抛物柱上边界层的 Blasius 级数中，取 $\xi/\sqrt{1+\xi^2}$ 代替 x，其中 ξ 为抛物坐标．因为这样一来，收敛半径便可伸展到无穷远处(参看第十章);

(i) 在自由流线理论中，取 $\varepsilon/(2+\varepsilon)$ 代替 ε(Garabedian, 1956)，其中 $2+\varepsilon$ 是空间维数．因为这样一来，收敛半

径随可增大。

3.2 标准函数；量阶符号

流体力学问题的解依赖于坐标(比如说，x, y, z, t)，也依赖于各种参数. 可以适当地重新定义，使其中一个或若干个量在摄动解中小到趋于零. 我们来研究，当其余坐标和参数固定时，其解依赖于这样一种摄动量的性态. 因而，我们要描述某函数 $f(\varepsilon)$ 当 ε 趋于零时的性态. 在上游边界条件(2.3b)，(2.6b) 等中，必须描述远离物体处解的性态，这时情况也相仿.

可能有几种不同准确程度的描述方式，我们按其表达精细程度的次序讨论其中的六种. 首先，我们可以简单说极限是否存在，譬如，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\sin 2\varepsilon$ 有极限，而 $\sin\dfrac{2}{\varepsilon}$ 没有极限. 但我们只关心认为极限存在的那些问题.

其次，我们可以定性地描述极限值. 有三种可能性. 当 $\varepsilon\to 0$ 时，函数可能

$$\left.\begin{array}{lll}(a) & 趋于零: & f(\varepsilon)\to 0\\ (b) & 有界: & f(\varepsilon)<\infty\\ (c) & 无界: & f(\varepsilon)\to\infty\end{array}\right\}$$

因趋于零的函数也是有界的，第一种情况包括在第二种情况中. 这是这种描述方式的特点. 不过，只要有可能，大家自然会使用第一种描述，因为它要更准确些.

第三，可以定量地描述极限值. 仍有三种可能性，仅第二种可能性作了改进.

$$\left.\begin{array}{ll}(a) & \lim f(\varepsilon)=0\\ (b) & \lim f(\varepsilon)=c，其中 c 为常数\\ (c) & \lim f(\varepsilon)=\infty\end{array}\right\}\quad(当\ \varepsilon\to 0\ 时)$$

第四，可以定性地描述极限过程的速率. 于是，上述方式

中仅对情形 (a) 和 (c) 作了改进。可以通过同一组标准函数进行比较的方式来进行改进。对这些标准函数大家非常熟悉，以致可以认为它们的极限性态在直观上是已知的。我们用量阶符号 O (大 "o") 和 o (小 "o")来进行比较。这些符号为估计摄动解的近似程度提供了必要的手段。

若将 $f(\varepsilon)$ 同某标准函数 $\delta(\varepsilon)$ 进行比较，当 $\varepsilon\to 0$ 时，比值 $f(\varepsilon)/\delta(\varepsilon)$ 有界。我们可记为：

$$\text{当 } \varepsilon\to 0 \text{ 时若 } \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)}<\infty,\ f(\varepsilon)=O[\delta(\varepsilon)] \tag{3.2}$$

如果比值趋于零，就用符号 o，记为：

$$\text{当 } \varepsilon\to 0 \text{ 时若 } \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)}=0,\ f(\varepsilon)=o[\delta(\varepsilon)] \tag{3.3}$$

例子如下：

$$\sin 2\varepsilon=O(\varepsilon),\quad 1-\cos\varepsilon=O(\varepsilon^2)=o(\varepsilon)$$
$$\sqrt{1-\varepsilon^2}=O(1),\quad \sec^{-1}(1+\varepsilon)=O(\varepsilon^{1/2})=o(1) \tag{3.4}$$
$$\cot\varepsilon=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\quad \exp(-1/\varepsilon)=o(\varepsilon^m)\ (\text{对一切 } m)$$

标准函数象摄动量本身一样，不是唯一的。不同于明显的标准函数的选择方法有时是有利的。譬如，在某些情况下，用以下等价的表达式代替式 (3.4) 的第一种情形是有用的：

$$\sin 2\varepsilon=O(2\varepsilon),\quad O(\tan\varepsilon),\quad O\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\text{等}$$

人们通常选 ε 的实数次幂为标准函数，因为它们具有大家最熟悉的性质。然而，这组函数是不完全的，譬如说，它不能描述函数 $\log 1/\varepsilon$，因为当 ε 趋于零时，它将趋于无穷，但其速率比 ε 任意次幂更缓慢。因此，必要时，ε 的幂函数必须用其对数函数、指数函数、log log 或其等价形式来加以补充。譬如，

$$\operatorname{sech}^{-1}\varepsilon = O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right),\qquad \cosh^{-1}K_0(\varepsilon) = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$(3.5)$$

$$\cosh\frac{1}{\varepsilon} = O\left(e^{\frac{1}{\varepsilon}}\right),\qquad \exp\left(-\cosh\frac{1}{\varepsilon}\right) = O\left(\exp\left[-\frac{1}{2}e^{1/\varepsilon}\right]\right)$$

如同式 (1.4) 一样，人们往往在用 $\log 1/\varepsilon$ 较合适的地方写成 $\log\varepsilon$。

没有一个量阶符号肯定地描述了趋于极限过程的真正速率，它只是给出了一个上界。所以，用

$$\sin 2\varepsilon = O(1),\ o(1),\ O(\varepsilon^{1/3}),\ o(\varepsilon^{1/2})\ 等 \qquad (3.6)$$

代替式 (3.4) 的第一个例子在形式上是正确的。但我们假定总是给出可能的最准确的估计式。譬如说，这就表示选择 ε 尽可能高的幂次函数为标准函数；仅当根据不足而不能采用符号 O 时，才使用符号 o。当然，在缺乏足够的资料时，这个结果依然只是一个上界。

用符号 O 和 o 表示的数学量阶在形式上不同于物理量大小的量阶，因为比例常数没有考虑在内。所以，即使 K 为一万，$K\varepsilon$ 还是 $O(\varepsilon)$。然而，在物理问题中，人们至少从直觉上期望把这两个概念联系起来，这一点几乎总是可以实现的。因而，若物理理论的误差为 $O(\varepsilon)$，ε 是合理选择的参数，那么，可以预期，数值误差不超过 ε 的几倍，可能是 2ε 或 $2\pi\varepsilon$，但肯定不是 10ε。

由上述物理上的联系，量阶符号的简单运算规则是显而易见的。譬如，积(或商)的量阶等于量阶的积(或商)；和或差的量阶等于主项的量阶，即 m 为最小值的 ε^m 项的量阶。量阶符号可以关于 ε 或其它变量进行积分，通常不允许对量阶关系进行微分。但在物理问题中，一般认为对其它变量的微

分是合法的，从而使其导数同原先的量有相同的量阶．读者要了解量阶符号的其它性质，请参看 Erdélyi（1956）的第一章。

3.3 渐近表示；渐近级数

第五种方式是定量地描述一个函数趋近于其极限的速率．正如第三种方式是第二种方式的改进一样，这种方式是第四种方式——使用量阶符号——的改进．我们只要保留比例常数即可，并记为

$$\text{当 } \varepsilon \to 0 \text{ 时，} f(\varepsilon) \sim c\delta(\varepsilon) \tag{3.7a}$$

若

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)} = c \tag{3.7b}$$

这就是说，若

$$f(\varepsilon) = c\delta(\varepsilon) + o[\delta(\varepsilon)] \tag{3.7c}$$

时，上式就是该函数的渐近形式或渐近表示，它是下面要讨论的渐近展开的主项．下面是一些例子：

$$\begin{aligned} &\sin 2\varepsilon \sim 2\varepsilon, &&\operatorname{sech}^{-1}\varepsilon \sim \log\frac{2}{\varepsilon} \\ &\sqrt{1-\varepsilon^2} \sim 1, \quad && K_0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\varepsilon^{1/2}e^{-1/\varepsilon} \\ &\cot\varepsilon \sim \frac{1}{\varepsilon}, &&\int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{1+\varepsilon t} \sim 1 \end{aligned} \tag{3.8}$$

第六，上面是仅使用一个标准函数时最准确的描述方式，它可以再补充几项来加以改进．把所讨论的函数同其渐近形式之差看作为新函数，并确定其渐近形式．结果为

$$f(\varepsilon) \sim c_1\delta_1(\varepsilon) + c_2\delta_2(\varepsilon) \quad (\text{当 } \varepsilon \to 0 \text{ 时}) \tag{3.9a}$$

其中第二个标准函数 $\delta_2(\varepsilon)$ 一定要比第一个标准函数量阶更高，即

$$\delta_2(\varepsilon) = o[\delta_1(\varepsilon)] \quad 或 \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\delta_2(\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)} = 0 \tag{3.9b}$$

其误差为更高的量阶:

$$f(\varepsilon) = c_1\delta_1(\varepsilon) + c_2\delta_2(\varepsilon) + o[\delta_2(\varepsilon)] \tag{3.9c}$$

重复上述过程可进一步得到若干项。于是，我们便可构成N项的渐近展开或渐近级数，并记为

$$f(\varepsilon) \sim c_1\delta_1(\varepsilon) + c_2\delta_2(\varepsilon) + \cdots + c_N\delta_N(\varepsilon)$$
$$= \sum_{n=1}^{N} c_n\delta_n(\varepsilon) \qquad (当\ \varepsilon \to 0\ 时) \tag{3.10a}$$

其定义是

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{N} c_n\delta_n(\varepsilon) + o[\delta_N(\varepsilon)],$$
$$当\ \varepsilon \to 0\ 时 \tag{3.10b}$$

若函数 $f(\varepsilon)$ 及标准函数 $\delta_n(\varepsilon)$ 都是已知的，渐近级数的系数 c_n 可以由

$$c_m = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon) - \sum_{n=1}^{m-1} c_n\delta_n(\varepsilon)}{\delta_m(\varepsilon)} \tag{3.11}$$

相继求出。若标准函数都是 ε 的正整数幂函数，我们就称它为渐近幂级数。当项数N无限增加时，就得到了一个无穷渐近级数。该级数可以是收敛的，也可以是发散的。

关于渐近展开的一些例子如下:

$$\sin 2\varepsilon \sim 2\varepsilon - \frac{4}{3}\varepsilon^3 + \frac{4}{15}\varepsilon^5 + \cdots$$

$$\mathrm{sech}^{-1}\varepsilon \sim \log\frac{2}{\varepsilon} - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{32}\varepsilon^4 + \cdots$$

$$K_0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\varepsilon^{1/2}e^{-1/\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon + \frac{9}{128}\varepsilon^2 + \cdots\right) \tag{3.12}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{1+\varepsilon t} \sim 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 - 6\varepsilon^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! \varepsilon^n$$

$$\log n! \sim \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + \cdots$$

在上述级数中，当项数无限延伸时，头两个级数是收敛的，后三个级数是发散的。

把远处的边界条件看作渐近关系是适宜的。譬如，(2.6b)可以写成

$$\psi \sim U\left[\frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{a}r^2(1-\cos 2\theta) + r\sin\theta\right], \quad r \to \infty \tag{2.6b'}$$

必须懂得，这个边界条件允许有量阶为 $o(r)$ 的误差。在所讨论的问题中，渐近展开式的下一项实际上为 $O(1)$；远上游处的流函数必有一个常数为待定。在物理上，它相应于驻点流线的平移。

3.4 渐近序列

刚才描述的逐项构造展开式的过程，实际上就是第二章中求摄动解所使用的过程。于是，在每个问题中，一个摄动解产生了一个特定的标准函数序列：

$$\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon), \delta_3(\varepsilon), \cdots \tag{3.13}$$

它们是以量阶逐渐增高的次序排列的：$\delta_{n+1} = o(\delta_n)$。这就是同该问题有关的**渐近序列**。渐近序列不能随意规定，它们必须足够完全，譬如出现对数函数时也要能描述它。另一方面，对于任一特殊的渐近序列，又有无数种与之不同的形式：

$$\sin 2\varepsilon \sim 2\varepsilon - \frac{4}{3}\varepsilon^3 + \frac{4}{15}\varepsilon^5 + \cdots$$

$$\sim 2\tan\varepsilon - 2\tan^3\varepsilon - 2\tan^5\varepsilon + \cdots$$

$$\sim 2\log(1+\varepsilon) + \log(1+\varepsilon^2) - 2\log(1+\varepsilon^3) + \cdots$$
$$\sim 6\left(\frac{\varepsilon}{3+2\varepsilon^2}\right) - \frac{756}{5}\left(\frac{\varepsilon}{3+2\varepsilon^2}\right)^5 + \cdots \tag{3.14}$$

最后两种形式说明，不同的渐近序列不一定是等价的；即对应项不是同阶的．要是摄动量(即 ε)和标准函数 (ε^m, $\log 1/\varepsilon$, $\log\log 1/\varepsilon$ 等)规定以后，渐近序列及渐近展开本身就是唯一的．

我们已经看到，解决摄动问题的途径之一是：假定一个级数形式的解．这就需要猜测合适的渐近序列．正如第二章所举的那些例子那样，最简单的可能性是：渐近序列由整数幂函数 ε^n 构成．也可能有分数幂函数的情况，尤其是在奇异摄动问题中，例子如下：

$1,\ \varepsilon^{1/2},\ \varepsilon,\ \varepsilon^{3/2},\cdots$	大 Reynolds 数 R 下，绕光滑物体的层流无分离流动，其中 $\varepsilon = 1/R$ (Van Dyke, 1962a)
$1,\ \varepsilon^{3/4},\cdots$	大 Reynolds 数 R 下分离 Oseen 流，其中 $\varepsilon = 1/R$ (Tamada, Miyagi, 1962)

在某几步会出现对数项，例如，

$1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2\log\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3\log\varepsilon,\ \varepsilon^3\cdots$	在小 Reynolds 数 R 下的轴对称流，$\varepsilon = R$ (Proudman, Pearson, 1957)；
$1,\ \varepsilon^2\log\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^4\log^2\varepsilon,\ \varepsilon^4\log\varepsilon,\ \varepsilon^4,\cdots$	超声速轴对称细长体理论 $\varepsilon =$ 厚度参数 (Broderick, 1949)；
$\varepsilon\log\varepsilon,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2\log\varepsilon,\ \varepsilon^2,\cdots$	绕钝体的平面高超声速流的 Newton-Busemann 近似，$\varepsilon = \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}$ (Che-

	ster, 1956a);
$(\log \varepsilon)^{-1}, (\log \varepsilon)^{-2}, (\log \varepsilon)^{-3}, \cdots$	小 Reynolds 数 R 下的平面粘性流动，$\varepsilon = R$ (Kaplun, 1957; Proudman, Pearson, 1957);
$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4 \log \varepsilon, \varepsilon^4, \cdots$	圆头翼型亚声速薄翼理论，$\varepsilon =$ 厚度参数 (Hantzsche, 1943);
$1, \varepsilon^{1/2}, \varepsilon, \varepsilon^{3/2} \log \varepsilon, \varepsilon^{3/2} \cdots$	在大 Reynolds 数 R 下绕平板的层流流动 (Goldstein, 1956; Imai, 1957a).

对于最后两个例子，早期的研究者因为没有料到对数项的存在，所以得到了错误的解答．Stewatson (1957) 已经研究了边界层理论中的其它例子．他指出：在圆柱远下游处的渐近解中，甚至会出现 log log 项．

很少会遇到以指数律衰减的小项，这些项不好处理．下述例子说明估计式 $O(e^{-1/\varepsilon})$ 没有什么实际意义：

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{-x/\varepsilon}}{e^{-1/\varepsilon}} = \begin{cases} 0, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \\ \infty, & x < 1 \end{cases} \tag{3.15}$$

自然就产生了这样一个问题：我们怎样才能确信自己猜测到了一个合适的渐近序列呢？这显然没有一般的规律，但下述原则会有些用处：

(a) 如果怀疑猜多了，我们就会得到关于其系数的齐次问题，其解(若是唯一的)等于零，这样一来，多余的项就消失了．

(b) 在遇到困难时，首先启示我们要随时考虑到有对数项存在．

(c) 迭代有时(不总是如此)会自动导出渐近序列．

人们通常有这样一种感觉：若求解过程进行得顺利，所

有的项就互相匹配，复杂的表达式往往可以简化．人们根据经验知道，如果没有上述这种使人放心的迹象，这就告诉我们得重新考察所假定的级数形式．不过，唯一安全可靠的办法是让渐近序列待定，并在求解过程中逐项加以确定．这种方法将在第七、八章中举例说明．

3.5 渐近级数的收敛性和精确度

我们已经看到，渐近级数可以在 ε 的某一范围内收敛，也可以对所有的 ε 都发散．在摄动问题中，往往既不知道，也不关心级数是否收敛，Jeffreys（1926）已经令人信服地提出了这一观点．认为收敛性肯定有实际意义是错误的．数学上，收敛性取决于无限高阶项的性态，然而在物理问题中，人们只计算了头几项，并希望它们迅速地趋近于真解．有时，发散级数比收敛级数更加符合这个要求．Bessel 函数的展开式

$$J_0(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{1}{64}\varepsilon^4 - \frac{1}{2304}\varepsilon^6 + \cdots \quad (3.16)$$

有无限大的收敛半径，但除非 ε 很小，要得到准确的结果需要计算很多项．譬如，当 $\varepsilon \geqslant 4$ 时，头三项按其大小来说实际上是递增的，所以该级数好象是发散的．若要准确到三位有效数字，至少要计算八项．另一方面，渐近展开

$$J_0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \sim \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\pi}}\left[\left(1 - \frac{9}{128}\varepsilon^2 + \cdots\right)\cos\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}\varepsilon - \frac{75}{1024}\varepsilon^3 + \cdots\right)\sin\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$(\varepsilon \to 0 \text{ 时}) \quad (3.17)$$

不管 ε 多小都是发散的，但对于中等大小的 ε，只要若干项就可达到较高的准确度．对于 $1/\varepsilon = 4$，仅第一项就准确到三位有效数字．

渐近展开的用途在于：根据定义其误差相当于被略去的第一项的数量级．因此，当 ε 减小时，它迅速地趋于零．对于固定的 ε，增加项数开始也能使误差减小．但是，如果级数是发散的，最后总会达到这一步，在这以后增加项数反使误差增大．图 3.1 说明了这种性态．为了实用起见，这些性质往往是理想化的，尤其是在以薄翼理论为例的这一类参数摄动问题中，更是如此．这时，仅小 ε 值是有实际意义的．我们仅计算了若干项，所以还没有达到增加误差的这一步．

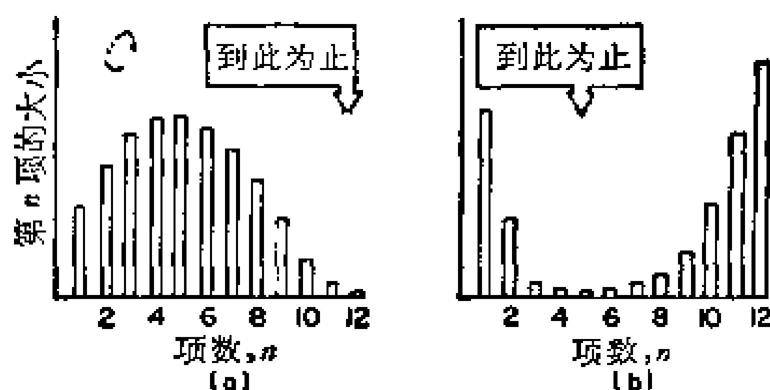


图 3.1　级数中各项的性态．(a) 缓慢收敛级数，(b) 发散渐近级数．

然而，在还有一些问题中，我们力图使 ε 尽可能地大些．比如对于大或小 Reynolds 数的参数摄动展开式就是如此；对坐标摄动来说，几乎总是如此，因为我们总想把结果尽可能地应用于远离原点的范围．在这种情况下，收敛性可能会有重要的实际意义．如第十章所述，有时我们可以改进收敛速率和收敛半径，甚至使发散级数收敛．

从物理观点来看，摄动量 ε 仅取正实数．但是，想象它在复平面上的解析延拓，往往可以在数学上获得新的见解（图 3.2）．当解是摄动量的幂级数时，这一点特别有用．于是，在 Janzen-Rayleigh 方法中，我们考虑复 M^2 平面；在薄翼理论中考虑复厚度比平面等等，那么，我们便可利用复变函数论中强有力的统一观点．

关于解析延拓原理的某些知识或感性认识是必不可少的。解析函数在每个正则点附近可展开成幂级数；该幂级数在伸展到最近奇点的圆内是收敛的；定义在任一区域，甚至仅定义在某一线段上的函数，通常可在复平面上（可能在若干 Riemann 面上）更大的区域内唯一地被定义，这可以通过解析延拓的过程来完成。

有时，从摄动解头几项可以看出该级数是收敛的，但其收敛半径是有限的，在物理上又没有什么明显的原因。按照刚才所述的原理，这必定是因为在 ε 复平面上正实轴外的某处有一个奇点（参看注 15）。第十章讨论的一些例子说明，在这种情况下，奇点通常在负实轴上。如果最自然地选取了自变量，该奇点实际上在 $\varepsilon=-1$ 处（图 3.2）。可以用简单的保角映射——**Euler 变换**

$$\tilde{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \tag{3.18}$$

把奇点挪到无穷远处去，以消除这种人为的限制。这样，收敛半径被伸展到 $\tilde{\varepsilon}$ 复平面上的最近奇点处，并且往往会使级数的适用性得到很大改进。

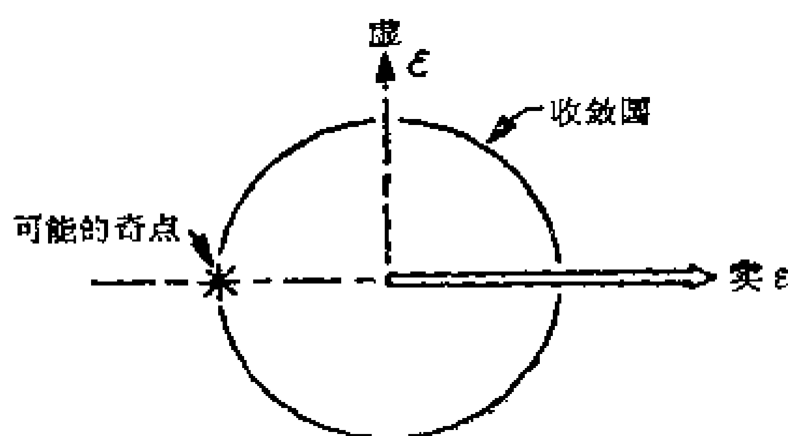


图 3.2 摄动量 ε 的复平面.

3.6 渐近展开的性质

把一个假定的级数代入摄动问题中去，我们必须进行象加、减、乘和微分这样的运算．通常，加、减运算是合法的．如果结果是一个渐近展开式，乘法是有效的．一般不允许对渐近展开式关于摄动量和其它变量进行微分．关于渐近展开式的上述性质和其它性质，在 Erdélyi (1956) 的书中进行了讨论．不过，好象还没有这样普遍意义的结果，以致可以适用于常见的含对数项那样的级数．因而，实际上人们常常形式上对其它变量进行微分运算而不加证明．如果这种运算是不合理的，就会在解中产生非一致性．

在物理问题中，渐近展开的系数将依赖不同于 ε 的空间或时间变量．如果其误差关于这些变量一致地小，就称该级数是**一致有效**的(对于空间或时间)．关于 x 非一致有效的例子如下：

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{x}} = O(\varepsilon), \qquad \text{在 } x = 0 \text{ 附近是非一致有效的}$$

$$\varepsilon \log x = O(\varepsilon), \text{ 在 } x = 0, \infty \text{ 处是非一致有效的} \tag{3.19}$$

奇异摄动问题可确切地定义为：在整个感兴趣的范围内，不存在单一的一致有效渐近展开式的那种问题．式(3.19)那种非一致性常常发生在实际的奇异摄动问题中．譬如说，第一种情况发生在亚声速薄翼理论的圆前缘处；第二种情况发生在尖前缘处，或发生在小 Reynolds 数平面粘性流动中．

我们已经看到，如果规定了标准函数或渐近序列，每个函数就有唯一的渐近展开式．另一方面，常常有这样的提法：不同的函数可以有相同的渐近展开式．可以考虑下述例子来理解这种非唯一性的程度：

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{1+\varepsilon}\\[2ex]\dfrac{1+e^{-1/\varepsilon}}{1+\varepsilon}\end{array}\right\}\sim 1-\varepsilon+\varepsilon^2-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\varepsilon^n \tag{3.20a}$$

关于标准函数 ε^n，这两个函数有任意项恒同的渐近展开式，它们之差小到只有当 ε 的幂函数的无限序列穷尽之后，譬如说将它们求和以后才显得出来。对于这个例子，刚好可以用 Euler 变换(3.18)容易地完成这一步。关于新的摄动量 $\bar{\varepsilon}$，两个函数有不同的渐近展开式(它们刚好终止于有限项)：

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\sim 1-\bar{\varepsilon}$$

$$\frac{1+e^{-1/\varepsilon}}{1+\varepsilon}\sim 1-\bar{\varepsilon}+e\cdot e^{-1/\bar{\varepsilon}}-e\bar{\varepsilon}e^{-1/\bar{\varepsilon}} \tag{3.20b}$$

同 ε 的幂函数序列相比，我们称 $e^{-1/\varepsilon}$ 为超越小的．因为对于任意 m，不管 m 多大，这一项总是 $o(\varepsilon^m)$．同样，在不同量级的水平上，ε 本身同序列 $(\log\varepsilon)^{-m}$ 相比是超越小的，该序列可发生在小 Reynolds 数平面粘性流动中．在第八章中，我们将联系到那个问题来讨论处理超越小项的可能性（参看注 11）.

3.7 逐次近似法

在流体力学中所遇到的摄动问题，通常是包含适当初始条件和边界条件的常微分方程组或偏微分方程组．在涉及热辐射的问题中，也会得到积分微分方程．用逐次近似法求解有两种系统的方法，两者在上一章均已举例说明过：

(i) 代入一个假定的级数；

(ii) 从基本近似解出发进行迭代．

第一种方法更常见些．其指导思想是：因为展开式至少

必须在渐近意义上对摄动量 ε 的所有值都成立，所以 ε 的同阶项必须分别满足每个等式．这就是说，我们可以令 ε 的同次幂项、有相同 m、n 值的 $\varepsilon^m \log^n \varepsilon$ 项相等．

每种方法各有其优缺点，有时可以将两种方法结合起来以发扬优点，消除缺点．两者最重要的差别概括如下：

(a) 仅当已知合适的初级近似后，才能开始迭代．如果将级数代入，让其渐近序列为待定，就可得出基本近似．所以，级数展开法更自然些．第七章还要举例说明．

(b) 迭代不需要猜测渐近序列． 除非令渐近序列待定，它要比假定一个展开式更可靠．譬如，在奇异摄动问题的高阶近似中，虽然不总是如此，但经常会出现对数项．如果假定了一个幂级数，这些项就被忽略掉了．

(c) 从第二项以后，级数展开法更加有系统，因为它仅得出有意义的结果．但是在非线性问题中，迭代法会产生没有意义的某些高阶项，因为与它同阶的其它项被略掉了．譬如，在圆柱的 Rayleigh-Janzen 解中 (2.4 节)，显然，下一步迭代不仅会得到 M^4 阶的项(这是正确的，且与级数展开法的结果相同)，也会得出 M^6 和 M^8 阶的某些项． 由于这些项是不完整的，应予丢弃．

(d) 迭代法一步就能得到用级数展开法要几步才能得到的、几乎同阶的那些项的组合．例如，在轴对称细长体理论中，每迭代一次就增加如下的一组项：

$$[1],\ [\varepsilon^2\log\varepsilon,\ \varepsilon^2],\ [\varepsilon^4\log^2\varepsilon,\ \varepsilon^4\log\varepsilon,\ \varepsilon^4],\cdots$$

不管使用哪一种方法，存在某些对所有摄动解共有的特性．基本解可能是线性的或非线性的，但所有高阶近似都由带有线性边界条件的线性方程所支配．跨声速、高超声速小扰动理论是例外，这时双重极限过程是专门加以规定的，以便在摄动过程中保留问题主要的非线性性质．在这种特定的情

况下，仅三阶项以上满足线性问题。在其它情形，由于一阶摄动是线性独立的，所以它们可以叠加。譬如，在 2.2，2.3，2.4 节中分别研究的三种摄动可以叠加起来，从而得到在弱剪切流中，稍可压缩流体绕过略可变形圆柱的流动的一阶解。但高阶近似将通过不同 ϵ 的交叉乘积项而发生耦合。

虽然支配高阶近似的方程是线性的，但它们通常包含一些系数，这些系数依赖于低阶近似解且不等于常数。利用原先那些结果的已知关系式，常常可以使计算大大简化。在第四章薄翼理论中有一个简单的例子，该例子中微分方程和边界条件都被用来简化下一阶近似的微分方程和边界条件。

如同在 2.4 节中 Janzen-Rayleigh 解一样，高阶问题彼此间的主要差别是，在微分方程中出现越来越复杂的非齐次项（同前一阶近似有关），这是在寻求特解时要加以考虑的。找特解最好的方法通常是猜测，仅当这种努力失败后，才应使用更复杂的分析过程。

对于少数问题，也应注意用低阶近似来找通用的特解。我们用轴对称可压缩流小扰动理论中的两个例子来说明这种可能性。第一个例子是，在超声速螺旋桨的近似线化理论中，我们发现其二阶速度势满足非齐次波动方程

$$\square^2\phi_2 = (1-M^2)\phi_{2xx} + \phi_{2rr} + \frac{\phi_{2r}}{r} + \frac{\phi_{2\theta\theta}}{r^2}$$

$$= 2M\phi_{1x\theta} \tag{3.21a}$$

其中，一阶近似是齐次方程 $\square^2\phi_1 = 0$ 的解。Burns (1951) 注意到，其特解总是由一阶解以下式来表达的：

$$\phi_{2p} = \frac{M}{1-M^2}x\phi_{1\theta} \tag{3.21b}$$

第二个例子，如果我们考虑了非线性项来改进旋成体的亚、超声速绕流的线性理论，其二阶速度势满足

$$\Box^2\phi_2 = M^2\{[2+(\gamma-1)M^2]\phi_{1x}\phi_{1xx} + 2\phi_{1r}\phi_{1xr} + \phi_{1r}^2\phi_{1rr}\} \tag{3.22a}$$

在这里仍有 $\Box^2\phi_1=0$. Van Dyke (1952) 发现，准确到三阶项的特解为

$$\phi_{2p} = M^2\left[\phi_{1x}\left(\phi_1 - \frac{\gamma+1}{2}\frac{M^2}{1-M^2}r\phi_{1r}\right) - \frac{1}{4}r\phi_{1r}^3\right] \tag{3.22b}$$

这类特解通常也用试凑法，而不是用系统的分析方法求得的。对于粘性流动，Lin 和 Schaaf (1951) 类似地找到了某些齐次方程的解。

3.8 边界条件的转移

边界条件常常规定在其位置随摄动量 ε 略微发生变化的曲面上，该曲面可能是固壁(如 2.3 节中略微变形了的圆柱)，自由流线，激波等(图 3.3)。为了有系统地进行展开，对每种情形必须用相应于 $\varepsilon=0$，即曲面的基准位置上的量来表达边界条件。否则，ε 不仅显含而且隐含在摄动展开式中，从而使结果不必要地复杂化了。因为该级数不是渐近展开，所以不能令 ε 相同的函数相等。

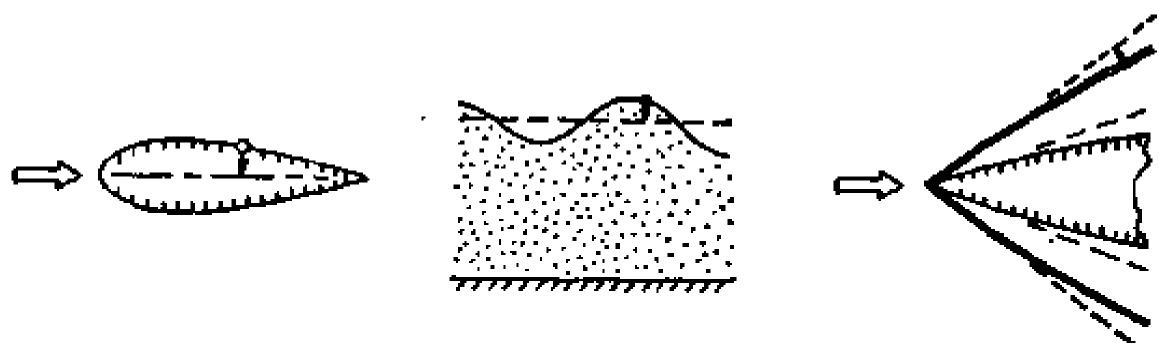


图 3.3 边界条件转移的实例.

利用解在基准面邻域中的变化方式的知识，可以进行边界条件的转移。往往已知解关于坐标是解析的，这时，只要将

它关于在基准面上的函数值展开成 Taylor 级数即可. 在一阶近似中,通常就是直接将条件从扰动面转移到基准面上.另一方面,在轴对称细长体理论中,其解在轴上有奇异性,利用在轴附近速度势以 $\log r$ 的规律变化、径向速度以 $\frac{1}{r}$ 的规律变化这一事实,便可进行边界条件的转移.

求出问题的解以后,常常要计算物面上或其它曲面上的量. 重复转移过程并把它们用基准面上的值来表达,就可以以最简单的方式求得这些量. 这两种转移过程将在第四章举例说明,并参看习题 2.1, 2.3, 3.2.

3.9 正坐标展开

当小量是坐标(空间或时间)的无量纲组合,而不单是参数时,这种摄动问题具有某些特性. Chang (1961) 对参数展开和坐标展开的差别进行了有益的讨论. 主要是对参数不进行求导,所以可以对某个参数值求解,而不必考虑其它参数值. 人们常常在一个坐标为小量或大量时求其近似解,分别把它们称为**正坐标展开**和**逆坐标展开**是有好处的.

对于由抛物型、双曲型方程支配的问题,正坐标展开是很自然的. 我们将方程的解关于小的类时间变量进行展开,当然该变量可以是空间坐标,而不是真正的时间. 随着时间的流逝,摄动量必定在该变量正向的意义上增加. 那么,由于不存在逆向影响,摄动级数中的每一项同以后的项没有关系,因此,可以依次进行计算. 结果是一个摄动展开式,它描述了解从已知的基本初始状态进行演化的初期.

以下是正坐标展开的典型例子. Goldstein 和 Rosenhead (1936) 用展开成时间幂函数的方法来计算柱体作脉冲运动时边界层的发展过程,其基本方程是抛物型的. 譬如,他们求

由在圆柱驻点附近的表面摩擦力为

$$\tau \sim \rho\nu^{1/2}U_1^{3/2}x\frac{1}{\sqrt{\pi U_1 t}}[1+1.42442(U_1t)$$

$$-0.21987(U_1t)^2+\cdots] \tag{3.23}$$

其中，U_1 是头部无粘表面速度的梯度，x 为沿着物面计算的距离。如图 3.4 所示，当时间增大时，该级数显然是发散的，这时，它应当趋于定常流的 Hiemenz 解。这种非一致性通常发生在正坐标展开中(参看 10.6 至 10.8 节)。

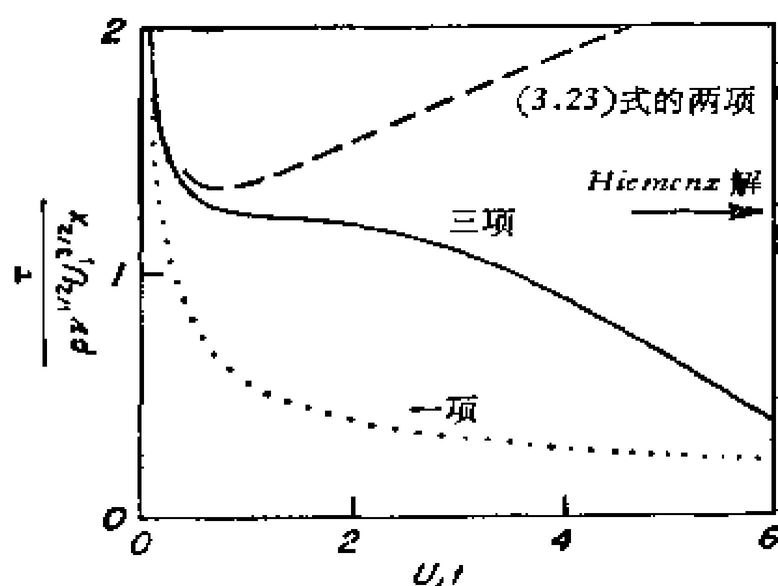


图 3.4 驻点附近表面摩擦力的增长。

柱体上定常边界层的 Blasius 展开式表达为离开驻点的距离 x 的幂级数，这是空间坐标起着类时间变量作用的一个例子。边界层方程(2.25a)对于定常流和非定常流都是抛物型的。我们认为，对于抛物柱的结果(1.5)仅当 $x/a<\pi/4$ 时才是收敛的 (Van Dyke, 1964a)。另一个涉及双曲型方程的这种例子是轴对称 Crocco 问题：对圆锥超声速绕流的相似解进行摄动，可以得到旋成卵形体头部初始流动的梯度 (Cabannes, 1951)。

对于椭圆型方程，坐标展开通常只给出定性的结果。人

们经常遇见的是边值问题，而不是初值问题．这时，因为有逆向影响，任何局部区域的解都依赖于远处的边界条件，所以不可能对小的坐标值依次计算展开式各项．所能做到的仅仅是找到展开式的形式，每项尚有一个或几个待定常数．譬如，Carrier 和 Lin (1948) 用对于小半径进行展开的方法，研究了平板前缘附近粘性流动的性质．经修正后流函数的级数为(参看注 8)

$$\psi = 2Ar^{3/2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3}{2}\theta\right) + Br^{5/2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{5}{2}\theta\right) + \frac{A^2}{4\nu}r^3\left\{2\sin^2\theta[\log r\sin\theta + (\theta-\pi)\cos\theta] + \frac{8}{5}(\sin 2\theta - 2\sin\theta) + \frac{4}{3}C\sin^3\theta\right\} + \cdots \tag{3.24}$$

其中 $\theta = 0$ 指在平板上．常数 A，B，C 依赖于展开式适用范围外远处的边界条件，因而在所作的分析范畴内，这些常数是未定的．

椭圆型方程初值问题这个异乎寻常的例子是个例外．在超声速钝体绕流的反问题中(图 3.5)，事先给定了脱体激波，要确定产生这种激波的物体形状．虽然在对称轴附近的流动是亚声速的，但流函数可以展开成激波下游距离的幂级数，并相继求出它的系数来．当 $M=2$ 时，Cabannes (1956) 计算了该级数的七项．对于抛物面形状的激波，在对称轴附近的流函数为

$$\frac{\psi}{y^2} = \frac{1}{2} - \frac{5x}{3a} - \frac{85}{18}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{215}{27}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \frac{11945}{324}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \frac{7051}{243}\left(\frac{x}{a}\right)^5$$

$$-\frac{1817909}{2916}\left(\frac{x}{a}\right)^6+\cdots \tag{3.25}$$

除了这样的少数例外情况之外，仅当我们把问题作为抛物型方程一样来处理，并将级数在有限项处截断时，正坐标展开才能有成效地应用于椭圆型方程.

钝体问题非常棘手，所以，为了使方程变成抛物型或双曲型的，某些研究者宁可引进另一个自变量。于是，Cabannes (1953) 研究了脉冲运动，并把非定常流展开成时间的幂级数. 他指出，其精确度随马赫数增加而增加. 当 $M=\infty$，$\gamma=7/5$ 时，他求出了任意光滑物体激波脱体距离 Δ 同头部半径 a 之比值

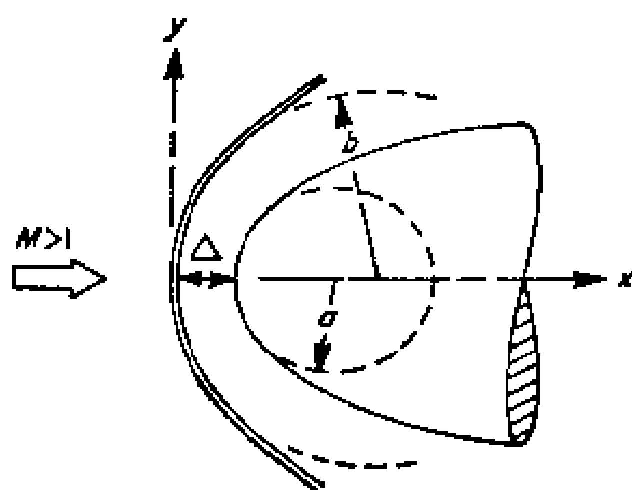


图 3.5 绕钝体的超声速流动.

$$\frac{\Delta}{a}=\frac{1}{5}\left(\frac{Ut}{a}\right)-(n-1)\frac{7}{75}\left(\frac{Ut}{a}\right)^2+\cdots \tag{3.26}$$

其中，n 是空间维数：对平面流动，$n=2$；对轴对称流，$n=3$. 可以预期，平面运动的结果更精确些，因为对于一维活塞问题，上述结果是准确的. 当时间增大时，上述级数显然是发散的. Cabannes 试图用已知的这两项计算其最大值作为其极限值. 对于平面流，得 $\Delta/a=0.107$，而圆柱的精确数值结果为 0.377. 在 10.7 节中我们还要再来研究这一差别.

3.10 逆坐标展开

与正坐标展开通常具有有限的收敛半径不同，对于大坐

标的逆坐标展开，看来常常是发散的渐近级数．不论基本方程是什么类型的，逆坐标展开也有不定性．对于椭圆型方程来说，情况同正坐标展开所讨论的完全一样，但待定常数有时可以同解的积分性质联系起来．所以，远离有限物体的亚声速流展开式中的头几个积分常数恒等于其升力、阻力、力矩等（Imai, 1953; Chang, 1961）．对于抛物型、双曲型方程而言，因为展开式是逆着类时间变数的方向进行的，所以产生了不定性．因而，在初始阶段会出现本征解，其常数因子同以前历史的某些细节有关．有时，利用某些整体的守恒律可以给出其中的一些常数，而不必详细了解事件的过去情况（参看 4.5 节）．更经常的是，有一系列常数仍是待定的．

随着方程的类型、空间维数、物体的大小不同，逆坐标展开的形式也有很大的不同．在某些问题中，展开式的主项是显而易见的，譬如，远离有限物体的定常流，其主项显然是未扰流；钝锥远下游处的流动，其主项是锥形流动；脉冲运动经过很长时间后，其主项是相应的定常流．然后对该基本解进行摄动，以了解它是怎样趋于该基本解的．这种趋近方式有时是代数型的，即大坐标负次幂型的，远离有限物体的无环量位势流动就是如此（Imai, 1953）．经常出现的情况是，不仅包含代数项，而且也包含对数项，远离物体的有环量位势流动或粘性流动就是如此（Chang, 1961）．在同时间有关的问题中，象非定常粘性流动或自由流线流动那样，趋近的方式往往是指数型的（Kelly, 1962; Curle, 1956）．

我们举一个例子．边界层的 Blasius 级数（2.6 节）对于离开驻点的小距离是正坐标展开．在抛物柱上，我们可以用大距离的逆坐标展开来补充这个近似．其主项显然是平板解，因为在远下游处，头部半径同感兴趣的尺度相比可以忽略不计．对该基本解进行摄动得到摩阻系数的表达式：

$$c_f \sim 0.6641 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \left[1 + 0.3006 \frac{\log(2x/a)}{x/a} + \frac{C_1 - 1}{2x/a} + \cdots\right] \tag{3.27}$$

这里，x 是坐标，C_1 是平板本征解无限序列中第一个本征解前的待定常数 (7.6 节)。

有时，主项绝不是那么明显的．由自流线流动是出现这种复杂性的一个例子．对平面流动，远下游处死水区的宽度以 $x^{1/2}$ 的规律增加；然而对于轴对称流，它以 $x^{1/2}(\log x)^{-1/4}$ 的规律增加，这是不常见的 (Levinson, 1946)．

3.11 方程类型和特征的改变

摄动法的一个奇妙的特性是，它们可以改变支配问题的偏微分方程的类型，给人造成假象．Prandtl 边界层近似就是一个突出的例子．虽然 Navier-Stokes 方程是椭圆型的，但它们在边界层内为抛物型方程所代替，在边界层外按其流动是亚声速的还是超声速的，为椭圆型或双曲型方程所代替．还有，在表面波理论中，椭圆型的 Laplace 方程为浅水波近似的非线性双曲型方程所代替 (Stoker, 1957)．与之相反，在锥型流的线性理论和细长体近似中 (Ward, 1955)，无粘性超声速流的双曲型方程变成椭圆型方程了．

这种方程类型的改变意味着影响区、依赖区以及所需的边界条件的重大改变．这样一来，因为 Prandtl 边界层方程是抛物型的，它可以逐步向下游进行积分．原先的椭圆型方程的逆向影响被抑止了，但在高阶近似中还要表现出来(参看第七章)．同样地，在薄翼理论中，由于不存在对上游的影响了，在亚声速尾缘处的 Kutta-Joukowski 条件必须放弃．

关于光滑性的某些假设是这种方程类型改变的基础．凡

在这个假设遭到破坏的地方，就必须辨明方程的真正类型。否则，摄动解至少在局部区域失效。所以，正如浅水波近似和细长体近似那样，边界层理论在角点附近也无效。由于边界条件发生间断，所以，它们是奇异摄动问题。

方程类型改变的趋向往往是不完全的；摄动方程只能变成"双曲型性质更弱的"或"椭圆型性质更强的"。对双曲型方程来说，就是特征面改变了。超声速小扰动理论是一个例子，在这个例子中的每一步，摄动方程的真正特征面为来流 Mach 锥所近似。要是物体是充分光滑的，这一缺陷仍是无关紧要的。否则，就会导致非一致性(参看第六章及习题 3.4)。

习　　题

3.1　改进的高超声速相似律. 按照高超声速小扰动理论，在半顶角为 θ 的细长楔或锥面上，压力系数的公式如下：

$$C_{p_s} \approx \theta^2 f(M\theta)$$

根据 Newton 碰撞定理(在以高超声速飞行的物体上任一点的压力系数为表面同来流夹角正弦平方的二倍)，试导出更适合于厚物体的压力系数的公式。通过对 $M=\infty$ 时的完整解进行数值比较，阐明改进的程度。若以超声速相似律

$$C_{p_s} \approx \frac{1}{M^2-1} F(\sqrt{M^2-1}\ \theta)$$

为指南，研究是否能把上述结果推广到低速厚物体的情况。

3.2　相切条件的转移. 一个小球在静止空气中脉动，其半径随时间以 $\epsilon f(t)$ 规律变化，从而产生弱的外行波，其速度势满足声学方程 $\phi_{tt}=c^2\nabla^2\phi$. 试证，若函数 f 充分光滑，相切条件可近似地转移到原点，即

$$\lim_{r\to 0} r^2\phi_r = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}[\epsilon f(t)]^3$$

并利用上述条件计算 ϕ. 试问，f 必须光滑到何等程度？如果这一限制遭到破坏，其解会发生什么情况？

3.3　由坐标展开式计算极限值. 把 Cabannes 用来计算时间为无限时

式(3.26)的值的方法应用于式(3.23)和(1.5)，它们的解答都是已知的，从而检验 Cabannes 的想法. 如果极值不存在，是否可以选在拐点处的值? 试提出一种同类型的更佳，更合理的方案.

3.4 特征改变的作用. 下述问题是定常超声速流绕薄翼上表面流动的数学模型:

$$\phi_{yy} - \phi_{xx} = \varepsilon\phi_{xx},\ \phi(0, y) = \phi_x(0, y) = 0,\ 对\ y > 0$$

$$\phi_y(x, 0) = \varepsilon f'(x),\ 其中\ x < 0\ 时,\ f(x) = 0$$

略去微分方程右边第一项，求解方程，然后用迭代法求二阶近似. 试同精确解作比较，推断对函数 f 有什么样的限制才能使 n 阶近似在物体表面附近有效? 并讨论在远处发生的情况.

第四章　薄翼理论中的奇异摄动问题

4.1　引言

现在我们开始研究在流场的某些区域内以前用过的直接摄动法会失效的那些问题．这时，相继两项之比不象原先所假定的那样是小量,所以在局部区域,该近似不再是渐近展开了．由于这种非一致性，我们可能算错，甚至得不出如在大 Reynolds 数下粘性流动的表面摩擦力、传热和薄翼阻力等主要结果.何况,甚至在开始阶段往往就不能形式地计算高阶近似了．这类问题就是奇异摄动问题．Friedrichs (1955) 对此作了很好的综述，该文讨论了不同于流体力学的数学物理各分支中奇异摄动问题的发生．

Prandtl 边界层理论是奇异摄动问题的范例．但是,我们却要通过研究较简单的绕薄翼的不可压缩流动来介绍这个题目．因为这种流动是受二维 Laplace 方程支配的，且该方程是线性的,所以可以用解析形式来表达所得的结果,从而能更加清楚地阐明主要思想．这个问题也很适宜于用来引进众所周知的两种处理奇异摄动问题的方法．于是，本章就成为全书的基石．以下各章仅仅是为了推广和扩充本章联系到薄翼这个标准问题时所提出来的那些概念．

研究的步骤如下:首先,形式地计算一般的对称翼型的薄翼展开式;然后对几种特定形状翼型,阐明其非一致性和非唯一性,其产生的原因是在驻点破坏了小扰动的假定;最后，我们用三种方法作了改进：一是在物理上进行直观的论证，二是根据边界层理论的精神,同局部解进行匹配,三是对圆形边

缘情形，采用变形坐标。

4.2 形式的薄翼展开

我们考虑不可压缩、无粘性、均匀来流绕过薄翼的二维流动。为简单起见，我们只讨论对称流动，因为它体现了所有最重要的特性。不过，因弯度和攻角引起的非对称效应可用同样的方法处理。读者若要详细了解，请参看 Lighthill (1951)，Jones 和 Cohen (1960)，Thwaites (1960) 等文章关于薄翼理论的阐述。

我们用笛卡儿坐标系，使翼弦置于 x 轴任一合适的线段上，其长度可假定为 1 的量阶。然后令翼型由 $y=\pm\varepsilon T(x)$ 来描述，其中 ε 为某个厚度参数，$T(x)$ 是数量级为 1 的某个函数，它确定了翼型的厚度分布(图 4.1)。改变 ε 就可得到一族仿射相关的翼型。

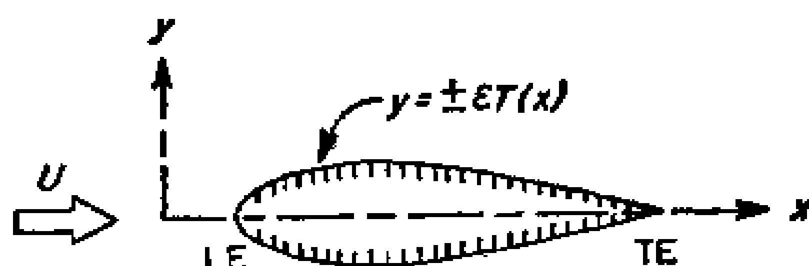


图 4.1 绕薄翼的对称流动.

流动是无旋的。考虑到以后要推广到三维流动，用速度势 ϕ 来进行讨论有其方便之处。将速度势归一化，使速度向量为 $q=U\mathrm{grad}\phi$，其中 U 是来流速度。那么，整个问题归结为

微分方程：$\phi_{xx}+\phi_{yy}=0$ (4.1a)

上游条件：$\phi\sim x+o(1)$（当 $x^2+y^2\to\infty$ 时）(4.1b)

相切条件：$\dfrac{\phi_y}{\phi_x}=\pm\varepsilon T'(x)$（在 $y=\pm\varepsilon T(x)$ 上）

(4.1c)

渐近条件 (4.1b) 中的第二项仅要求在无穷远处扰动势为零；对于封闭物体它实际上为 $O\left(\frac{1}{r}\right)$. 去除环量后，这个要求保证了解的唯一性.

这个仅涉及最简单的线性椭圆型偏微分方程的问题乍一看来是乏味的，但是却难以求解并达到满意的精度. Theodorsen (Abbott 和 von Doenhoff, 1959) 提出的保角映射的标准数值方法十分麻烦，也不准确. 因此，薄翼近似不仅有理论意义，也有实用价值. 对于亚声速可压缩流动，其运动方程是非线性的，在三维情形，保角映射法不适用，薄翼近似用处更大.

我们求当厚度参数 ε 趋于零时解的渐近展开式. 取其极限状态，翼型退化为一根直线，它不会使来流发生扰动，所以其基本解是均匀平行流. 对于给定的厚度分布函数 T，我们暂且假定渐近级数为

$$\phi(x, y; \varepsilon) \sim x + \varepsilon\phi_1(x, y) + \varepsilon^2\phi_2(x, y) + \varepsilon^3\phi_3(x, y) + \cdots \tag{4.2}$$

这表示展开式以 ε 的整数次幂函数伸展到无穷. 只要翼型不是很钝的，对不可压缩流动来说，这一展开式看来是正确的；参看习题 4.3. 然而，对亚声速可压缩流绕圆头翼型的流动，例 (1.2) 说明从 $\varepsilon^4\log\varepsilon$ 项开始要出现 ε 的对数项.

为了将上述展开式代入完整的问题，并令 ε 的同次幂相等，我们必须将相切条件 (4.1c) 挪到 $y=0$ 轴上. 如果假定 $\phi_n(x,y)$ 在 $y=0$ 上关于 y 是解析的，我们可展开成 Taylor 级数，得出

$$\begin{aligned}\phi_y(x, \pm\varepsilon T) &= \varepsilon\phi_{1y}(x, 0\pm) \\ &\quad + \varepsilon^2[\phi_{2y}(x, 0\pm) \pm T(x)\phi_{1yy}(x, 0\pm)] \\ &\quad + \varepsilon^3[\phi_{3y}(x, 0\pm) \pm T\phi_{2yy}(x, 0\pm)\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}T^2\phi_{1yyy}(x, 0\pm)] + \cdots \qquad (4.3)$$

对 ϕ_x 可得类似的式子. 这里, $y=0\pm$ 指当取极限 $\varepsilon\to 0$ 时,翼型退化成的狭缝的上下侧, 越过该狭缝 ϕ_y 有间断(但 ϕ_x 是连续的). 上述这个展开式虽是为得到所需形式的级数必不可少的(参看 3.8 节), 但它是我们以后要遇到的非一致性的根源. 由于相继出现了高阶导数项, 我们可以预期会出现困难.

于是,我们就得到了一系列问题,其微分方程和相切条件都是线性的. 其中第一个问题就是通常的线性化薄翼理论:

$$\phi_{1xx}+\phi_{1yy}=0 \qquad (4.4a)$$

$$\phi_1=o(1) \qquad (当\ x^2+y^2\to\infty) \qquad (4.4b)$$

$$\phi_{1y}(x, 0\pm)=\pm T'(x) \qquad (4.4c)$$

$$\phi_{2xx}+\phi_{2yy}=0 \qquad (4.5a)$$

$$\phi_2=o(1) \qquad (当\ x^2+y^2\to\infty) \qquad (4.5b)$$

$$\begin{aligned}\phi_{2y}(x, 0\pm) &= \pm T'(x)\phi_{1x}(x, 0)\\ &\quad \mp T(x)\phi_{1yy}(x, 0)\\ &= \pm[T(x)\phi_{1x}(x, 0)]'\end{aligned} \qquad (4.5c)$$

$$\phi_{3xx}+\phi_{3yy}=0 \qquad (4.6a)$$

$$\phi_3=o(1) \qquad (当\ x^2+y^2\to\infty) \qquad (4.6b)$$

$$\begin{aligned}\phi_{3y}(x, 0\pm) &= \pm T'(x)\phi_{2x}(x, 0)\\ &\quad + T(x)T'(x)\phi_{1xy}(x, 0)\mp T(x)\phi_{2yy}(x, 0)\\ &\quad -\frac{1}{2}T^2(x)\phi_{1yyy}(x, 0)\\ &= \pm\left[T(x)\left\{\phi_{2x}(x, 0)+\frac{1}{2}T(x)T''(x)\right\}\right]'\end{aligned} \qquad (4.6c)$$

给出的二阶、三阶相切条件的另一种较简单的不同形式 (4.5c), (4.6c), 是利用了前阶近似的微分方程和相切条件后

得到的．由于这一改进，每个问题在形式上同第一个问题完全相同．所有高阶近似可以看作为某个想象的翼型的一阶近似，该翼型的厚度分布函数 $T_n(x)$ 是相切条件中的最后一个方括号内的表达式．

翼型表面上的流动量还可通过 Taylor 级数展开同对称轴上的速度分量联系起来，这样就能把它们表达为 ε 的幂级数． 因为对称轴上的 ϕ_{ny} 由相切条件给出，所以只需要求 $\phi_{nx}(x, 0)$．于是，譬如说，表面速度 q 可由下式给出：

$$\frac{q}{U} = 1 + \varepsilon\phi_{1x}(x, 0) + \left[\varepsilon^2\phi_{2x}(x, 0) + T(x)T''(x) + \frac{1}{2}T'^2(x)\right] + \cdots \tag{4.7}$$

当然，这一过程可能是产生非一致性的另一根源．

4.3 薄翼问题的解

我们已将每个高阶薄翼问题化成一阶问题的形式．可以用各种方法求解这个关键问题．用复变函数论的方法通常是最简单的，最好的办法常常是猜测复变数 $z = x + iy$ 的函数 $(\phi_x - i\phi_y)$，它要满足诸边界条件．Jones 和 Cohen (1960) 列出了这类解的一览表，很有用处．

然而，复变函数论方法的缺点是，它不能推广到三维流动中去．可以进行这种推广的另一种方法是，用奇点分布来代表物体．可将源、偶极子等置于物体表面上或物体内部．在薄翼理论中，它们自然分布在前后缘间的对称轴上．对于对称问题，只要用源和汇就可以了，封闭物体要求源汇的强度相等．

在原点处单位强度点源的速度势为

$$\phi = \frac{1}{2\pi}\log\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\log z \tag{4.8a}$$

$$\phi_x = \frac{1}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \tag{4.8b}$$

$$\phi_y = \frac{1}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \tag{4.8c}$$

对于充分光滑的翼型，连续性的考虑表明，源的当地强度必须等于翼型斜率的两倍．事实上已经证明，这一近似同我们把相切条件转移到轴上有相同的精确程度．因此，所有薄翼问题 (4.4)，(4.5) 等的解为

$$\phi_{nx}(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{LE}^{TE}\frac{(x-\xi)\phi_{ny}(\xi, 0+)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi \tag{4.9a}$$

$$\phi_{ny}(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{LE}^{TE}\frac{y\phi_{ny}(\xi, 0+)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi \tag{4.9b}$$

这可以直接代入，或以复数形式

$$\phi_{nx} - i\phi_{ny} = \frac{1}{\pi}\int_{LE}^{TE}\frac{\phi_{ny}(\xi, 0+)}{x+iy-\xi}d\xi \tag{4.9c}$$

代入加以证实．为了象式 (4.7) 那样计算物面上的值，我们只需要

$$\phi_{nx}(x, 0) = \frac{1}{\pi}\oint_{LE}^{TE}\frac{\phi_{ny}(\xi, 0+)}{x-\xi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\oint_{LE}^{TE}\frac{T_n'(\xi)}{x-\xi}d\xi \tag{4.10}$$

这里，如果 x 处于前后缘之间，上式指的是发散积分的 Cauchy 主值．Van Dyke (1956) 给出了一系列厚度函数 $T(x)$ 翼型积分 (4.10) 的一览表．

4.4 椭圆翼型的非一致性

大多数亚声速翼型的前缘是圆的．最简单的有限圆头翼型是椭圆，这是我们要仔细研究的对象．设厚度分布函数为 $T(x) = \sqrt{1-x^2}$，它描述了在区间 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 间，厚度比

为 ϵ 的一个椭圆(图 4.2). 前缘和后缘的(曲率)半径为 ϵ^2.

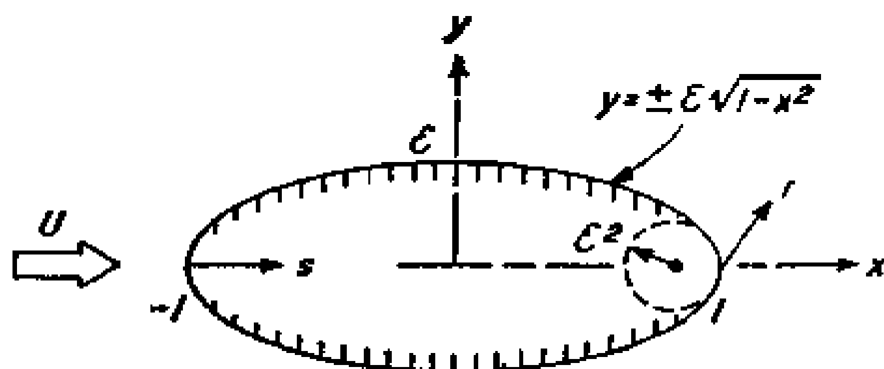


图 4.2 椭圆翼型.

将它代入式 (4.10) 得出

$$\phi_{1x}(x,0)=-\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{\xi d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)}$$

$$=\begin{cases}1 & (x^2<1)\\ 1-\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-1}} & (x^2>1)\end{cases}\qquad(4.11)$$

它是关于 ϕ_{1x} 的一阶问题 (4.4) 的解在对称轴上的值. 更一般地,从 Jones 和 Cohen 的表可得到整个流场的扰动复速度

$$\phi_{1x}-i\phi_{1y}=1-\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\qquad(4.12)$$

适当注意到在割缝上的主值，我们又得出了在对称轴上的式 (4.11). 然后,由式 (4.7) 导出线性化薄翼理论大家熟知的结果，在椭圆上的速度为常数，$q/U=1+\epsilon$. 这一数值在椭圆周线中点,即速度最大值处 (图 4.3) 恰好等于精确值.

如果一阶物面速度即使在翼型两端也是有限的，这一情况是会给人以错觉的. 根据式 (4.12)，扰动速度本身在前、后缘处是有奇性的. 在驻点,小扰动假定破坏了,因此，其解也局部地失效了. 薄翼解在前、后缘附近是非一致有效的.

扰动速度有 $\varepsilon/r^{1/2}$ 阶的奇异性，其中 r 为离开驻点的距离．因此，非一致性的区域是半径为 ε^2 阶的圆域．根据物理上的原因，可能已经预料到，它是前缘曲率半径的数量级．

在高阶近似中，振动解也会失效．我们已经看到，ϕ_2 的问题 (4.5) 同 ϕ_1 的问题完全相同．因此，从式 (4.7) 得到物面速度的二阶近似为

$$\frac{q}{U}\sim 1+\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{x^2}{1-x^2} \tag{4.13}$$

它具有 $\varepsilon/r^{1/2}$ 平方阶的奇性．在图 4.3 中，当 $\varepsilon=0.5$ 时，把一阶、二阶近似同精确结果作了比较，图中驻点附近级数的发散性是十分明显的．可以无限制地计算以下各项，我们发现第 $2n$ 阶近似有 $(\varepsilon/r^{1/2})^{2n}$ 阶奇异性．由于不断叠加更强的奇异性，虽然其符号是正负交替的，仍不能使驻点处的速度为零．(象一阶近似一样，奇数阶的速度分量也是奇异的，但对表面速度的贡献是正则的。)所以，除了离开前后缘为 ε^2 阶距离处，每一步都使解得到改善，而在前后缘附近，解的性态变得越来越坏．

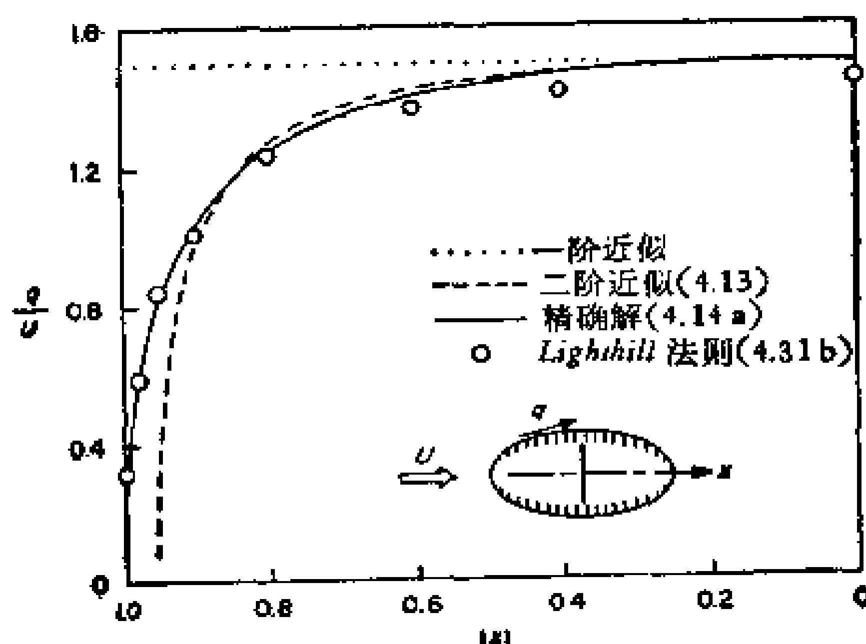


图 4.3 $\varepsilon=0.5$ 时，椭圆表面上的速度．

用保角映射法或椭圆坐标系中的分离变量法容易得到完全解．同该完全解相比较，可以验证形式的薄翼展开式．物面速度的精确结果为

$$\frac{q}{U}=\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2[x^2/(1-x^2)]}} \tag{4.14a}$$

对于小 ε 作形式的展开，得出

$$\frac{q}{U}=1+\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{1}{2}\varepsilon^3\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{3}{8}\varepsilon^4\frac{x^4}{(1-x^2)^2}+\cdots \tag{4.14b}$$

此式证实、推广了我们的结果(4.13)．而且，它使得产生非一致性的根源更加明显了． 奇性项来自于用二项定理展开(4.14a)的分母，这种展开仅当

$$(1-x^2)>\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \tag{4.15}$$

时才是合理的． 因此，在驻点 $x=\pm 1$ 附近是非一致有效的．

4.5 非唯一性；本征解

刚才进行的验证很重要，因为对圆头翼型，薄翼问题的解在数学上不是唯一的，相切条件(4.4c)，(4.5c)等在圆头附近是有奇性的．因此，我们有权把任何一个调和函数加到其解中去，该调和函数在前后缘附近也是有奇性的，但在其它方面不影响边界条件．对于本问题，用置于一端的点源和置于另一端的等强度点汇便可得出这样一个函数：

$$\phi=\frac{C}{2\pi}\left[\log\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\log\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right] \tag{4.16a}$$

$$\phi_x = \frac{C}{2\pi}\left[\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right] \tag{4.16b}$$

$$\phi_y = \frac{C}{2\pi}\left[\frac{y}{(x+1)^2+y^2} - \frac{y}{(x-1)^2+y^2}\right] \tag{4.16c}$$

显然，除了在前后缘附近，它对每个问题 (4.4)，(4.5) 等都没有影响，在前后缘处椭圆机翼的解无论如何是有奇性的。

这是本征解的第一个例子。3.10 节中曾讨论过在逆坐标展开中本征解的作用。虽然本例显然是参数摄动，因为它是奇异摄动问题，所以它也可看作为一种逆坐标展开。也就是说，在离前缘距离比半径 ε^2 大得多的地方，薄翼解就是精确的了。本征解 (4.16) 忽略了在边缘附近的细致流动。

式 (4.16) 对 x 的导数也是椭圆翼型的本征解。它由置于前后缘处的偶极子构成(为了满足上游条件，其强度不必是相等的)。同样地，由四极子、八极子组成的、相继奇性更强的本征解的无限序列，可由关于 x 重复微商得到。

为了使解具有唯一性，必须确定乘以每个可能的本征解的常数。可以用下述越来越完善的方法来达到目的:

(i) *最小奇性原理*　非常可靠、而又带有一点神秘色彩的是：在发生任何非唯一性的情况下，正确解总是具有尽可能最弱的奇性。对于椭圆翼型，这个原理在一阶解中排除了所有本征解，在二阶、三阶解中排除了源以外的所有本征解，在四阶、五阶解中，排除了除源和偶极子外的所有本征解，如此等等。在 5.6 节中讨论同边界层型的局部解相匹配的时候，我们要证明该原理的合理性。

(ii) *整体守恒原理*　有时可以找到一种守恒律，它可以用来确定本征解。对于椭圆翼型，质量守恒原理排除了源本

征解 (4.16)。达到这一目的方便的途径是，用流函数而不是用速度势来进行研究，这就可保证在总体上质量是守恒的．那么，所允许的最弱的本征解是偶极子而不是源（习题 4.1）．同第一种方法结合起来，就可以把椭圆翼型的不定性推迟到四阶近似中才发生。

(iii) 同补充的展开式进行匹配　在本章后一部分，我们概括了 Prandtl 详细研究非一致有效区的思想．这种方法的主要特征是，能够同在该区域中有效的补充渐近展开式相匹配．这个过程可以排除椭圆翼型薄翼展开式中的一切本征解．在上节，我们丝毫没有应用上述这些方法，而只是直接同已知的精确解作了比较．

对于更复杂的问题，上述所有方法都可能无效．半无限平板上边界层的三阶近似就是一例，它要到第七章中进行研究．这时，如果不解决整个问题，即使是在原则上确定第一个本征解，或许也是不可能的．对于这类难题，已试图用在任一点同另一个不同的近似解拼接 (Imai, 1957a)，或同某一数值解比较 (Traugott, 1962) 的办法来确定第一本征解。

4.6 Joukowski 翼型；前缘阻力

薄翼展开式在圆形前缘附近无效，这说明我们不能用积分表面压力的方法来计算阻力．在一阶近似以上，确实出现了发散积分．由于椭圆翼型前后缘的效应因对称性而抵销了，从而掩盖了这一现象．因此，我们来研究只有一个圆形边缘的简单翼型．

准确到二阶，对称的 Joukowski 翼型（图 4.4a）由厚度分布函数 $T(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$ 来描述．在中弦处的厚度比为 ε，最厚处厚度比为 $(3\sqrt{3}/4)\varepsilon=1.30\varepsilon$．式 (4.10) 给出了在对称轴上一阶流向扰动速度

$$\phi_{1x}(x,0) = -\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{1+\xi-2\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)}d\xi = 1-2x,$$

$$(x^2<1) \tag{4.17}$$

继续求二阶近似，得到物面速度为

$$\frac{q}{U} = 1+\varepsilon(1-2x)-\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{1-x}{1+x}(1+2x)^2+\cdots \tag{4.18}$$

根据 Bernoulli 方程，表面压力系数为

$$C_p = \frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = -2\varepsilon(1-2x)$$

$$-2\varepsilon^2 x\frac{4x^2-3}{1+x}+\cdots \tag{4.19}$$

阻力可以根据下式：

$$C_d = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U^2}\int p\,dy = \varepsilon\int_{-1}^{1}C_p(x)T'(x)dx \tag{4.20}$$

将压力沿着翼型进行积分来计算。然而，把薄翼展开式 (4.19) 代入上式表明，在前缘处二阶项是发散的。仅保留第一项得到一个负阻力：

$$C_d \approx 2\varepsilon^2\int_{-1}^{1}(1-2x^2)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = -2\pi\varepsilon^2 \tag{4.21}$$

根据 D'Alembert 原理，阻力必须等于零，所以这个结果显然是错误的。因为一阶薄翼理论不能预言驻点附近的压力上升(图 4.4b)，所以，该理论没有把对阻力的正贡献计算在内，其值刚好同我们刚才算出的在翼型其余部分上的拉力相抵销。

Jones (1950) 指出：如果不用表面压力，而用动量积分来计算阻力，就可复得这种**前缘阻力**，因为这种方法避开了前缘附近薄翼理论失效的区域。也可用以后要研究的方法改进

前缘附近的表面压力来重新得到前缘阻力．只有这种方法在二阶、高阶近似中是成功的．

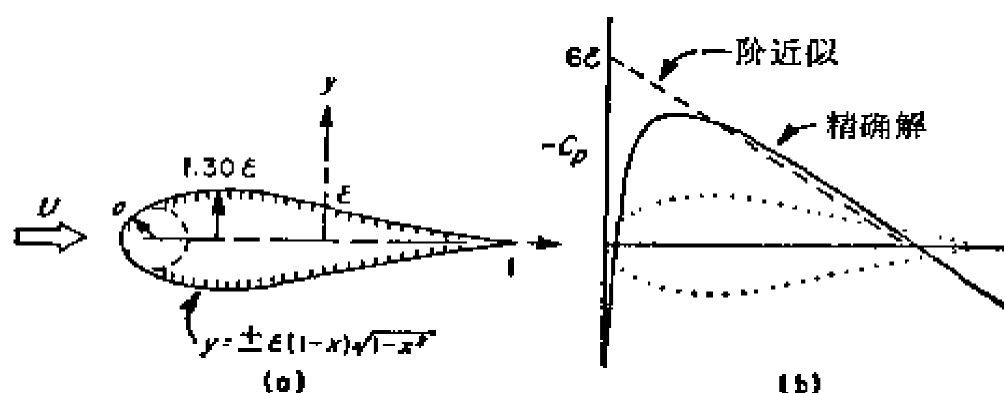


图 4.4 对称 Joukowski 翼型．(a) 几何形状，(b) 表面压力分布．

这样，人们发现，对任意圆头翼型的前缘阻力同 Joukowski 翼型的前缘阻力完全相同，它们必须被加到由线性理论得到的表面压力积分中去．一般地说，前缘阻力公式如下：

$$D_{LE}=\frac{1}{2}\pi\rho U^2a \tag{4.22}$$

式中 a 为前缘曲率半径，图 4.4 所示的 Joukowski 翼型的前缘半径为 $4\varepsilon^2$．前缘阻力刚好是有相同头部半径的无限抛物柱的阻力——按照 Prandtl 和 Tietjens (1934) 的意见，这个阻力被定义为由一断面所分割出来的头部阻力，当断面移到下游无穷远处的极限情况下，割缝中的压力为来流值(图 4.5)．显然，实际情况应该如此，因为当厚度趋于零时，任一圆头翼型在离开前缘下游越来越大的范围内为抛物柱所近似．在 4.8 节还要进一步利用密切抛物面的这一作用．

对于零厚度有升力的翼型，同样发生违反 D'Alembert 原理的现象．但对于这一情形，积分用线性理论预言的表面压力得到一个虚假的阻力，而不是拉力．所以，对于有攻角的平板，它显然得到一个法向合力，该合力有一个沿着下游方向的分量．解决这一佯谬还是同前缘的奇异性有关．可以用上述

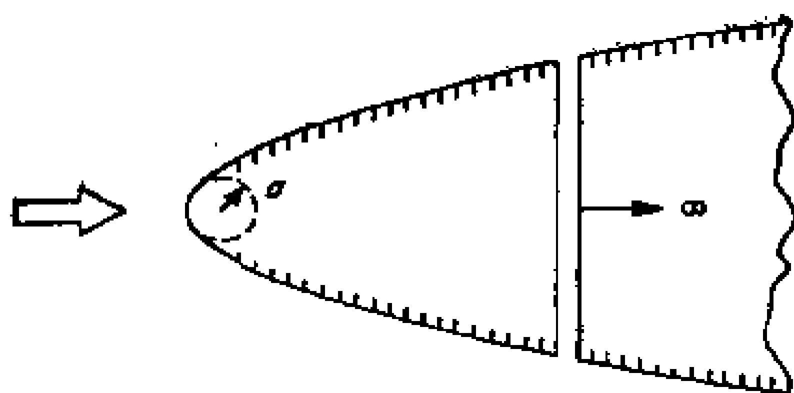


图 4.5 定义抛物柱阻力的示意图.

关于对称翼型的方法求出使阻力恢复到零所需的附加前缘拉力 (von Kármán 和 Burgers, 1935, pp.51-52).

4.7 双凸翼型;矩形翼型

我们来研究两种别的形状的翼型，分别涉及其驻点边缘比椭圆翼型更尖或更钝的情况。首先,厚度分布函数 $T(x)=1-x^2$ 描述了由两根抛物线组成的双凸翼型(图 4.6).

按以前所述方法得到一阶近似为

$$\phi_{1x}-i\phi_{1y}=\frac{2}{\pi}\left(2-z\log\frac{z+1}{z-1}\right) \tag{4.23}$$

在锐驻点边缘处，扰动速度以对数律趋于无穷，即使在物面上，其性态也如 $\varepsilon\log r$ 一样. 在高阶近似中仍有这种缺陷。所以,准确到二阶近似的物体表面速度为

$$\begin{aligned}\frac{q}{U}\sim 1&+\frac{2}{\pi}\varepsilon\left(2-x\log\frac{1+x}{1-x}\right)\\&+\varepsilon^2\left[\frac{3}{\pi^2}\left(2-x\log\frac{1+x}{1-x}\right)^2\right.\\&\left.-\frac{1}{\pi^2}\log^2\frac{1+x}{1-x}-(1-x^2)\right]\end{aligned} \tag{4.24}$$

在驻点,它有 $(\varepsilon\log r)^2$ 阶奇性，第 n 项则有 $(\varepsilon\log r)^n$ 阶奇

性．因此，展开式在离开两端为 $\varepsilon^{-1/\varepsilon}$ 阶的距离范围内无效．因为它比 ε 的任意次幂都要小，所以实际上通常可以略去不计；在尾缘处，这种非一致性将为粘性效应所掩盖．但是，我们不仅要了解和改进圆形边缘处的较严重缺陷，也要了解和改进这一微小缺陷，这是有重要意义的．

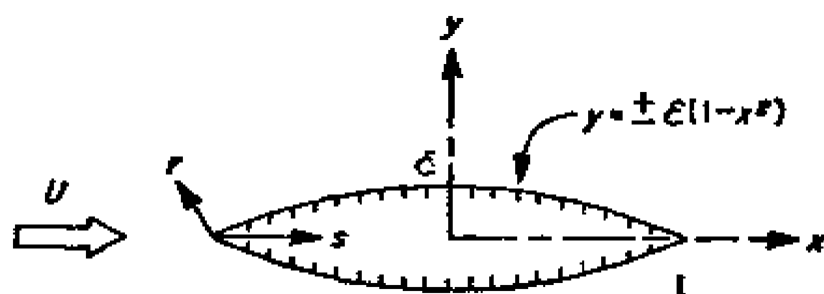


图 4.6　双凸翼型.

本例的奇异性很弱，不至于发生实际的困难．利用最小奇性原理，可以排除所有本征解，因为它们之中奇性最弱者——源本征解 (4.16)——在驻点处也要比薄翼展开式中任一项的奇性更强．况且，阻力系数的积分 (4.20) 是收敛的．所以，对于尖头翼型，形式的薄翼展开式可以计算到无限高阶．

第二个例子考虑薄矩形翼型这一相当极端的情况(图 4.7)，它可以用厚度分布函数 $T(x) = H(1 - x^2) = H(x + 1) - H(x - 1)$ 来描述．式中，H 是 Heaviside 单位阶梯函数．该函数当自变量为负时取零，自变量为正时取1．适当注意其中的不连续函数，我们由式 (4.10) 得出

$$\phi_{1x}(x, 0) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\delta(\xi + 1) - \delta(\xi - 1)}{x - \xi} d\xi \quad (4.25a)$$

式中 δ 为 Dirac delta 函数——H 的导数，除了自变量为零处以外，该函数均等于零，而在原点处，它等于无穷大并使其积分等于 1．这里发生这一情况有着明显的物理解释：源分

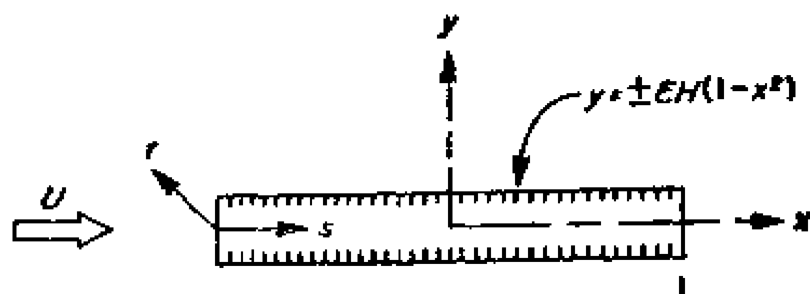


图 4.7　矩形翼型.

布的薄翼近似仅由前缘处的集中源和后缘处的等强度集中汇组成。式 (4.9) 中的积分显然要包括轴上的所有源点在内，因此，本例至少必须将积分限稍微延伸到前后缘以外，我们也可以直接将积分限延伸到无穷远处而得出

$$\phi_{1x}(x, 0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\xi+1)-\delta(\xi-1)}{x-\xi} d\xi$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-x^2} \tag{4.25b}$$

根据其物理解释，它显然是源本征解(4.16)，其常数 $C = 2$.

现在一阶速度在边缘上有 ϵ/r 阶奇性。这就表示，非一致性区域是边缘厚度 ϵ 数量级的，根据物理的原因可以预料到这一点. 如果要计算二阶、三阶近似，我们发现，在前后缘处积分 (4.10) 是发散的. 将式 (4.10) 进行分部积分可以减弱奇性，这也说明了对 $T=0$ 两端的光滑翼型，还有另一种不同的形式：

$$\phi_n(x, 0) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\oint_{LE}^{TE} \frac{T_n(\xi)}{x-\xi} d\xi \tag{4.10a}$$

对于目前这种非光滑外形，该积分依然是发散的，但只有对数奇性. 如果我们随意地丢弃无限值的项，其结果为

$$\phi_{2x}(x, 0) \overset{?}{=} \frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{4x}{(1-x^2)^2}\log\frac{1+x}{1-x}\right.$$

$$+ (1 - \log 2)\left[\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right]\Bigg\} \tag{4.26}$$

可以认出，上式第三项为源本征解式(4.16)，第二项为偶极子本征解．由最小奇性原理不能排除它们中的哪一个，因为第一项的奇性最强．但利用连续性的条件表明，不应出现源本征解．误差来自于对发散积分的随意处理，因此，仅可指望主项是正确的，第二项的强度应由一个待定常数来代替．于是，从式(4.7)导出二阶物面速度

$$\frac{q}{U} \sim 1 + \frac{2}{\pi}\varepsilon\frac{1}{1-x^2} + \frac{\varepsilon^2}{\pi^2}\left\{\frac{4x}{(1-x^2)^2}\log\frac{1+x}{1-x}\right.$$

$$\left. + C\left[\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\right]\right\} \tag{4.27}$$

偶极子本征解的强度 C 只能用同边缘邻域中适用的补充展开式相匹配的方法来求得．在习题 4.3 中会看到，这样做会使渐近序列从 $\varepsilon^2\log\varepsilon$ 项开始出现对数项．这一复杂情况是同下述事实有关的：即比椭圆更钝的形状实际上是不能用轴上的源来代表的．

4.8 圆头翼型的修正因子

上述这些例子说明了在奇异摄动问题中由非一致性所产生的某些困难．现在我们针对其发生的原因，用消除非一致性的方法来解决这些困难．下节我们要介绍一种相当一般的方法，它适用于一类广泛的奇异摄动问题．这种方法的优点是，必要时可以形式地加以应用，而丝毫不必求助于物理知识．但是，我们还是采用同物理直觉有密切关系的有关步骤来说明提出这种方法的动机．为了简单起见，仅考虑象以椭圆翼型为例那样的圆形边缘的情况，并且只讨论物面速度．

考虑绕厚度为 ε 任意圆头翼型的流动(图 4.8)。正如椭圆翼型一样，薄翼展开式在离前缘为头部半径 a 数量级的距离内失效，其头部半径 a 是正比于 ε^2 的。在该邻域中，翼型可以用有相同头部半径的抛物柱来代替。而且当厚度减小时，近似程度越好，这是因为它在更大倍数的头部半径那样大的范围内保持给定的精确度。

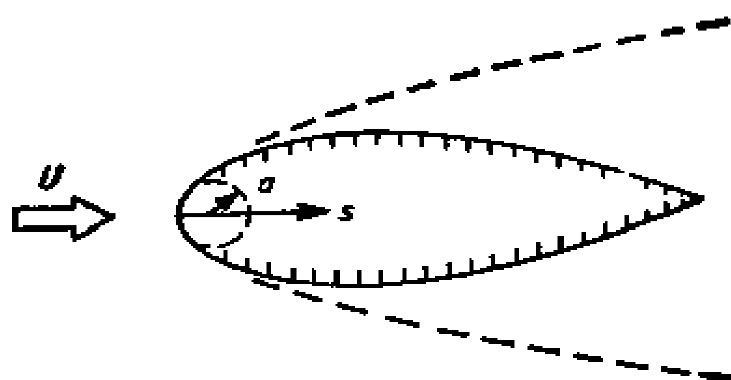


图 4.8 圆头翼型的密切抛物柱.

容易计算抛物柱上精确的表面速度，它可以由椭圆翼型的结果 (4.14a) 求极限得到.

$$q = U_i \sqrt{\frac{s}{s + a/2}} \tag{4.28}$$

式中 s 是离边缘的距离，U_i 是抛物柱上的最大速度，它显然几乎等于来流速度 U，但不需求出它的数值。对于小的头部半径 a，形式地展开上述表达式(更确切地说，对于小的 a/s 的值)，从而得到级数

$$\text{“}q\text{”} = U_i \left(1 - \frac{a}{4s} + \cdots\right) \tag{4.29}$$

引号的意思是指：这只是形式的结果，它必定也是薄翼理论的结果。实际上，它也可由椭圆翼型的二阶解式 (4.13) 得到。上式中的两项是二阶近似解，因为头部半径是 ε^2 数量级的，在抛物柱表面上，一阶扰动量恰好等于零，因此不存在一

阶 ε 的项。

现在，我们断言，上述两个表达式的比值，是使头部半径为 a 的任何翼型上速度的形式薄翼解"q"成为一致有效近似 $\bar{q}$ 的修正因子：

$$\bar{q} = \frac{\sqrt{\dfrac{s}{s + a/2}}}{1 - \dfrac{a}{4s} + \cdots} \text{“}q\text{”} \tag{4.30a}$$

其理由如下：在前缘附近，扰动很大，薄翼上的精确速度几乎同密切抛物柱上的速度相同；另一方面，远离前缘处，修正因子趋近于 1，所以，在薄翼理论有效的区域内，它又变成了翼型的薄翼解。

可以简化这一法则。因为分母已经在形式上作了展开，所以，进一步展开不会有什么坏处，对翼型的薄翼解作展开也一样。如果记得"q"$/U$ 是 $1 + O(\varepsilon)$ 形式的，并仅保留 ε^2 阶的项便可得到更简单的法则：

$$\frac{\bar{q}_2}{U} = \sqrt{\frac{s}{s + a/2}} \left(\frac{\text{“}q_2\text{”}}{U} + \frac{a}{4s} \right) \tag{4.30b}$$

式中，下标指形式的二阶解"q_2"已经成为二阶一致有效渐近解了。这应该在这样的意义上来理解的：翼型上速度或压力系数摄动的主项和次项（相对量阶为 ε）处处都正确无误。

这个法则首先由 Lighthill (1951) 导出，论证的方法完全不同，下面在 4.12 节中将予以阐述。他指出：这种法则也适用于有攻角或弯度的翼型，但后者的摄动量在头部附近仅准确到一阶。今后，我们称 (4.30b) 为 Lighthill 法则。

作为例子，我们把上述法则应用于椭圆翼型的前缘，该翼型的"q_2"$/U$ 由式(4.13)给出。由于 $s = x + 1$，$a = \varepsilon^2$，我们得到

$$\frac{\bar{q}_2}{U} = \sqrt{\frac{1+x}{1+x+\frac{1}{2}\varepsilon^2}}\left(1+\varepsilon+\frac{1}{4}\varepsilon^2\frac{1-2x}{1-x}\right) \quad (4.31a)$$

这样，在前缘处的奇异性消除了，并为适当的零值所代替．当然在后缘附近仍有奇异性，所以这个解关于 x 不是对称的．后缘的奇异性也可取 $s=1-x$，并再次应用 Lighthill 法则加以消除．经过进一步的简化，便得完全一致有效的结果：

$$\frac{\bar{q}_2}{U} = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2+\varepsilon^2+\frac{1}{4}\varepsilon^4}} \times\left(1+\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^2\right) \quad (4.31b)$$

上述结果图示于图 4.3 中，并同精确解和薄翼解作了比较，反映了它是一致有效的．

对用保角映射法解释 Lighthill 法则的上述推导是有益的．如果我们要将均匀流映射成绕翼型的流动，薄翼近似不能克服在圆头附近迅速变化的困难．然而，我们却可以利用两个映射之积——由均匀流映射成密切抛物柱，再从抛物柱映射成薄翼．虽然前者必须是精确地进行映射的，但后者是适合于应用薄翼理论的．式 (4.30b) 中的两项是同这两个保角映射相对应的．

4.9 圆头附近的局部解

现在我们再从 Prandtl 边界层理论的观点来考虑圆头翼型．也就是说，用引进放大变量的方法来研究非一致有效区中的细致流动．这样，我们得到了一个局部解，它是薄翼解级数展开式的补充．在下一节，我们要将它同薄翼解相匹配．至于这种形式的方法同上面直观的论证间的关系，在分析的过

程中会清楚的.

为了确定起见，我们讨论椭圆翼型．其结果为什么适用于其它圆头翼型，这是显而易见的．我们仅研究前缘处的非一致性,后缘处可用完全相同的方法来处理．为了简单起见，我们还是只讨论表面速度，此方法显然适用于整个流场．现研究二阶近似．为了显示方法的有效性，假定它在每一项中还含有一个未知常数乘以源本征解 (4.16)． 根据式 (4.13) 和式 (4.16)，表面速度的形式薄翼级数为

$$\frac{q}{U}=1+\varepsilon\left(1+\frac{C_1}{1-x^2}\right)-\frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{C_2}{1-x^2}\right)+\cdots \tag{4.32a}$$

当然如 4.5 节所述，为了证明 $C_1=C_2=0$，可以利用质量守恒的条件．但我们要指出，这可以由同局部解相匹配的方法导出．对于较困难的问题，这种方法是必需的.

由于所考虑的非一致性发生在前缘，令 $s=x+1$，将坐标原点移到前缘处有其方便之处(图 4.2)． 于是椭圆可用

$$y=\pm\varepsilon\sqrt{2s-s^2} \tag{4.33a}$$

来描述，薄翼的表面速度展开式 (4.32a) 可以写成

$$\frac{q}{U}\sim 1+\varepsilon\left[1+\frac{C_1}{s(2-s)}\right]-\frac{1}{2}\varepsilon^2\left[\frac{(1-s)^2}{s(2-s)}+\frac{C_2}{s(2-s)}\right]$$

$$\left(\text{当 } \varepsilon\to 0,\quad \frac{1}{s}=O(1)\right) \tag{4.32b}$$

该渐近展开式在 $s=O(\varepsilon^2)$ 的区域内失效，因为第三项是一的数量级，而不是象假定那样的是小量.

现在我们要引进用大写字母标记的自变量和因变量——

它们在非一致有效区内是一的数量级． 显然 s 要用 $1/\varepsilon^2$ 的因子来放大；另一个笛卡儿坐标 y 也用同法处理，因为非一致有效区是圆形区域．于是，我们引进新坐标：

$$S = \frac{s}{\varepsilon^2}, \qquad Y = \frac{y}{\varepsilon^2} \tag{4.34}$$

如果用这些变量，椭圆可描述为

$$Y = \pm\sqrt{2S - \varepsilon^2 S^2} \tag{4.33b}$$

因变量 ϕ 应该相应地引进 $\Phi = \phi/\varepsilon^2$ 来加以放大．但对于本问题，由于微分方程和边界条件关于 ϕ 都是线性的，所以这个修正因子就消去了．

现在我们研究当被放大的变量固定，令 ε 趋于零时所得的结果．也就是说，当厚度比为零时，我们继续不断地放大前缘的邻域，并使头部半径保持有限．取其极限，翼型的形状为

$$Y \sim \pm\sqrt{2S} \qquad (\varepsilon \to 0,\ S = O(1)) \tag{4.33c}$$

这就是单位头部半径的无限抛物柱． 在进行坐标放大后，Laplace 方程保持不变，因此，局部问题还是绕密切抛物柱的位势流动问题(图 4.9)．

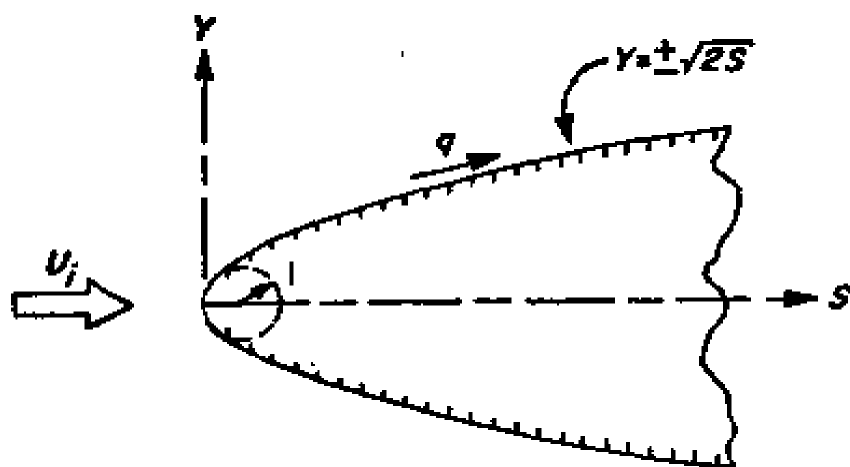


图 4.9 绕过密切抛物柱的局部流动．

为了使解是唯一的，还要补充规定一些边界条件．显然，流动关于 S 轴应是对称的．另一方面，远上游处的流动应是均匀的，这一点是不太明显的．但是所有其它可能性都会使无穷远处有更强的奇性，因此按照最小奇性原理是可以被排除的（4.5 节）．但是，我们不能得出结论：来流速度就是原先的来流速度 U．因此，我们把它记为 U_i，并用同薄翼解相匹配的方法来确定其值．注意，在上节推导 Lighthill 法则时并不需要 U_i，因为它互相抵消了．

为了求表面速度，关于 $\phi(S, Y)$ 的边值问题很容易求解．但从式 (4.28) 可见，其结果是现成的，

$$q \sim U_i\sqrt{\frac{2S}{1+2S}} \quad (\varepsilon \to 0,\ S = O(1)) \tag{4.35}$$

于是，当 ε 很小时，我们得到了解的两个不同的渐近展开式：除了前缘附近外，薄翼展开式 (4.32b) 成立；在前缘附近，局部解 (4.35) 适用．

现引进某些术语是有益的，在下一章还要加以补充．按 Kaplun (1954)，Lagerstrom 和 Cole (1955) 的意见，我们称薄翼级数为外展开．这是让外变数 s 和 y(或 x 和 y)固定，令 ε 趋于零时的结果．同样地，局部解是内展开的第一项，它是让内变量保持不变令 ε 趋于零时的结果（现在可以看出，在 U_i 中的下标是表示“内”的意思）．

4.10 同圆头附近解的匹配

正如这个例子的情况那样，一般说来，内外展开式是相辅相成的，在一个展开失效的区域另一个展开式就成立．这种互补性的一个重要特征是：两者可以互相匹配，匹配对该方法取得成功是必不可少的．在下面一章，我们要进行仔细研究．现在我们仅断言，在许多问题中，可以应用所谓渐近匹配

原理 (5.7 节)(参看注 4):

$$n\text{ 项外展开的 }m\text{ 项内展开} = m\text{ 项内展开的 }n\text{ 项外展开} \qquad (4.36)$$

式中，m，n 是两个任意整数，它们可以是相等或不相等的. 根据定义，将 n 项外展开用内变量来表达，对小 ε 进行渐近展开，并将结果截断至 m 项便可得到 n 项外展开的 m 项内展开；反之，便可得到式 (4.36) 右边的项.

现在我们应用上述原理来确定外展开 (4.32) 中的未定常数 C_1 和 C_2，以及内解(4.35)中的 U_i. 开始时，我们只知道表示未扰流动的第一项，对内展开一项也不知道. 为了确定内问题的有效来流速度 U_i 的一阶近似，我们取 $m = n = 1$. 若以下述方式将匹配程序系统化有其方便之处：

一项外展开:	$q \sim U$	(4.37a)
写成内变量:	$= U$	(4.37b)
对小 ε 进行展开:	$= U$	(4.37c)
一项内展开:	$= U$	(4.37d)
一项内展开:	$q \sim U_i\sqrt{\dfrac{2S}{1+2S}}$	(4.38a)
写成外变量:	$= U_i\sqrt{\dfrac{2s}{2s+\varepsilon^2}}$	(4.38b)
对小 ε 进行展开:	$= U_i\left(1 - \dfrac{1}{4}\dfrac{\varepsilon^2}{s} + \cdots\right)$	(4.38c)
一项外展开:	$= U_i$	(4.38d)

根据匹配原理 (4.36)，令 (4.37d) 等于 (4.38d) 得

$$U_i = U \qquad (4.39)$$

这就是说，内问题的有效来流速度准确到一阶等于真正的来流速度，从物理上讲，这似乎是合理的. 习题 4.2 指出：若内解在无穷远处是奇异的，就不能进行这种匹配，这表明我们求助于最小奇性原理不是没有理由的.

现在我们用相反的过程来确定外展开的第二项. 取 $m =$

1，$n=2$ 可得

$$\text{一项内展开:}\quad q\sim U\sqrt{\frac{2S}{1+2S}} \tag{4.40a}$$

$$\text{写成外变量:}\quad =U\sqrt{\frac{2s}{2s+\varepsilon^2}} \tag{4.40b}$$

$$\text{对小}\ \varepsilon\ \text{进行展开:}\quad =U\left(1-\frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{s}+\cdots\right) \tag{4.40c}$$

$$\text{二项外展开:}\quad =U \tag{4.40d}$$

$$\text{二项外展开:}\quad q\sim U\left\{1+\varepsilon\left[1+\frac{C_1}{s(2-s)}\right]\right\} \tag{4.41a}$$

$$\text{写成内变量:}\quad =U\left\{1+\varepsilon\left[1+\frac{C_1}{\varepsilon^2S(2-\varepsilon^2S)}\right]\right\} \tag{4.41b}$$

$$\text{对小}\ \varepsilon\ \text{进行展开:}\quad =U\left(\frac{C_1}{2\varepsilon S}+1+\cdots\right) \tag{4.41c}$$

$$\text{一项内展开:}\quad =U\begin{cases}\dfrac{C_1}{2\varepsilon S} & (\text{若}\ c_1\neq 0)\\[2ex] 1 & (\text{若}\ c_1=0)\end{cases} \tag{4.41d}$$

比较 (4.40d) 同 (4.41d)，发现仅当 C_1 等于零时，它们才能互相匹配，所以在一阶薄翼解中不存在源本征解。

现在把上述过程再反一个次序以确定内展开的第二项。取 $m=n=2$，得

$$\text{二项外展开:}\quad q\sim U(1+\varepsilon) \tag{4.42a}$$

$$\text{写成内变量:}\quad =U(1+\varepsilon) \tag{4.42b}$$

$$\text{对小}\ \varepsilon\ \text{进行展开:}\quad =U(1+\varepsilon) \tag{4.42c}$$

$$\text{二项内展开:}\quad =U(1+\varepsilon) \tag{4.42d}$$

上述最后的结果表明，内展开的第二项是 ε 量阶的。从式 (4.33b)，显而易见，用密切抛物柱 (4.33c) 来近似椭圆柱头部的误差是 ε^2 量阶的。因此，若 U_I 作了改进，不仅准确到一阶，而且准确到二阶的内解就是抛物柱的解。我们得到

二项内展开： $q \sim U_t\sqrt{\dfrac{2S}{1+2S}}$ (4.43a)

写成外变量： $= U_t\sqrt{\dfrac{2s}{2s+\varepsilon^2}}$ (4.43b)

对小 ε 进行展开： $= U_t\left(1-\dfrac{1}{4}\dfrac{\varepsilon^2}{s}+\cdots\right)$ (4.43c)

二项外展开： $= U_t$ (4.43d)

匹配表明：准确到二阶时，

$$U_t = U(1+\varepsilon) \tag{4.44}$$

其物理意义是：虽然前缘附近流动的性质仅依赖于翼型的局部形状，准确到二阶近似，它与密切抛物柱的性质相同，但该密切抛物柱的有效来流速度同真正来流速度略有不同。由于受相对而言较远的翼型部分的影响，有效来流速度增加了，这可以认为对于抛物柱增加了汇而引起的。所以，抛物柱头部以更快的速度在流体中运动，以使它能流过翼型的其余部分。

现在，我们可以取 $m=2$，$n=3$，再回到外展开，并证明匹配要求 C_2 等于零，即在二阶薄翼解中不存在源本征解。可用同样的方法排除偶极子和高阶本征解。

原则上，上述过程可以无限进行下去。但必须认识到，从下一步开始，内问题不再是关于绕抛物柱的流动问题，而是绕由展开（4.33b）式，并保留所需的项数而得到的更复杂形

$$Y \sim \pm\sqrt{2S}\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon^2 S-\frac{1}{32}\varepsilon^4 S^2-\cdots\right)$$

$$(\text{当 } \varepsilon\to 0,\ S=O(1)) \tag{4.45}$$

状的流动问题（图 4.10）。可以对绕密切抛物柱的基本流动进行坐标摄动的方法得到它的解。当然翼型形状的内展开式（4.45）对于大 S，事实上，对于 $S>2/\varepsilon^2$ 时是发散的，因此，在 $S=\infty$ 处内展开是非一致有效的。将已知的精确解

引进内变量并进行展开，得到

$$
\begin{aligned}
\frac{q}{U} &= \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1+\dfrac{(1-\varepsilon^2 S)^2}{S(2-\varepsilon^2 S)}}} \\
&\sim \sqrt{\frac{2S}{1+2S}}\left[1+\varepsilon+\frac{3}{4}\varepsilon^2\frac{S}{1+2S}\right. \\
&\quad +\frac{3}{4}\varepsilon^3\frac{S}{1+2S} \\
&\quad \left.-\varepsilon^4\frac{S^2(8S-23)}{32(1+2S)^2}+\cdots\right]
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

也可以得出这一结论．我们看到，在 $S=\infty$ 处的奇性是从内展开的第五项开始．这种发散性是无关紧要的，因为决不会把内展开应用于如此远的距离处．

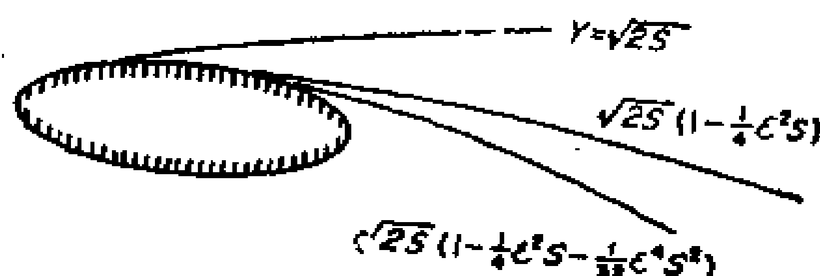


图 4.10　椭圆柱依次的内展开式．

4.11　同尖头附近解的匹配

现在我们将同一方法应用于尖头的情况．双凸翼型的例子（4.7 节）表明：尖头导致薄翼展开式的对数奇异性．但奇性很弱，以致不必特别注意这个问题就可以计算级数的无限项．然而，通过研究边缘附近的流动来了解产生对数奇性的根源是很有意义的．

为了简单起见，我们仅考虑双凸翼型的前缘，它可以推广

到任何形状的尖头翼型是显而易见的. 将原点移到前缘处(图 4.6),翼型可用

$$y = \pm\varepsilon(2s - s^2) \tag{4.47a}$$

来描述. 由 4.7 节可知, 薄翼展开式 (4.24), 在离前缘 $s = O(e^{-1/\varepsilon})$ 的距离内不成立. 因此,适当地放大的内变量是

$$S = se^{1/\varepsilon},\quad Y = ye^{1/\varepsilon} \tag{4.48}$$

用内变量来表达,翼型可用

$$Y = \pm\varepsilon(2S - e^{-1/\varepsilon}S^2) \tag{4.47b}$$

来描述. 当 ε 趋于零时, 第二项比 ε 的任意次幂更快地趋于零. 因此, 圆形前缘仅在二阶精度范围内可将它局部地看作是抛物柱形的,而尖前缘可用楔来近似它,并准确到任意阶精确度(图 4.11), 其顶角很小并趋近于零. 我们研究的翼型可用

$$Y \sim \pm 2\varepsilon S \quad (\varepsilon \to 0,\ S = O(1)) \tag{4.47c}$$

来近似.

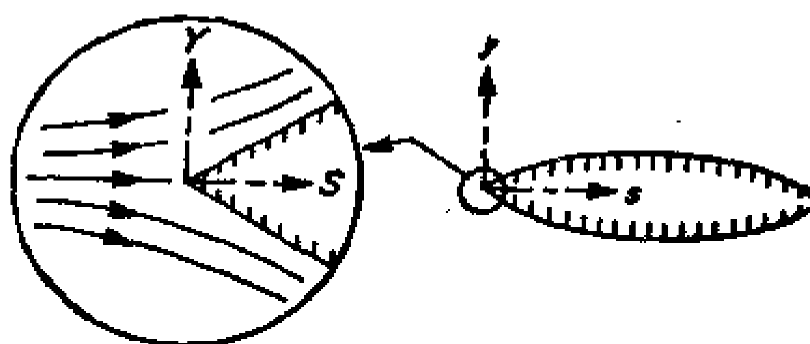


图 4.11 尖头翼型的内解.

合适的内解是绕这个楔的对称位势流动, 并要求在无穷远处有尽可能弱的奇性. 如图 4.12 所示. 可以用大家熟悉的均匀平行流的初等保角映射来求其内解, 它也同样可用极坐标中的分离变量法得到, 这种方法可以推广到三维问题中去. 所以,表面速度的内解为

$$q \sim U_i S^{\tan^{-1} 2\varepsilon/(\pi-\tan^{-1} 2\varepsilon)} \qquad (\varepsilon \to 0,\ S = O(1))$$
$$(4.49)$$

这里同圆头情况不同，甚至内展开的首项在无穷远处也发散。当 $S \to \infty$，速度无界，所以 U_i 不能解释为等价来流速度，而只能理解为 $S=1$ 处的表面速度。至于圆头情况，可以将它同薄翼理论的外展开进行匹配来确定 U_i。



图 4.12　绕过楔的流动的保角映射.

为了进行匹配，我们需要内解 (4.49) 的外展开。这就要求我们硬性将小的分数幂变成指数幂的形式级数展开，利用下述法则：

$$s^{\varepsilon} = \exp(\log s^{\varepsilon}) = \exp(\varepsilon \log s) = 1 + \varepsilon \log s + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \log^2 s + \cdots \qquad (4.50)$$

可达到这一目的，它关于小 ε 不是一致有效的。当 $\varepsilon \log s = O(1)$ 处，上式不成立，所以 $s = O(e^{-1/\varepsilon})$。这个结果解释了在尖头薄翼展开式中产生对数奇性的奥秘。

在匹配两个展开式时，我们不必象圆头翼型那样，从某阶近似到下一阶近似地来进行计算，可以一步就得到所需的任意阶近似。现在来研究二阶近似，那么，匹配原理 (4.36) 要应用于 $m=n=2$ 的情况，得出

二项外展开：

$$q \sim U\left\{1 + \frac{2}{\pi}\varepsilon\left[2 + (1-s)\log\frac{s}{2-s}\right]\right\} \qquad (4.51a)$$

写成内变量:

$$\varepsilon = U\left\{1 + \frac{2}{\pi}\varepsilon\left[2 + (1 - e^{-1/\varepsilon}S)\log\frac{e^{-1/\varepsilon}S}{2 - e^{-1/\varepsilon}S}\right]\right\} \quad (4.51b)$$

对小 ε 进行展开:

$$= U\left[\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + \frac{2}{\pi}\varepsilon(2 + \log S - \log 2) + \cdots\right] \quad (4.51c)$$

二项内展开:

$$= U\left[\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + \frac{2}{\pi}\varepsilon(2 + \log S - \log 2) + \cdots\right] \quad (4.51d)$$

再写成外变量:

$$= U\left[1 + \frac{2}{\pi}\varepsilon\left(2 + \log\frac{s}{2}\right)\right] \quad (4.51e)$$

二项内展开: $q \sim U_i S^{\tan^{-1}2\varepsilon/(\pi - \tan^{-1}2\varepsilon)}$ (4.52a)

写成外变量: $= U_i(e^{1/\varepsilon}s)^{\tan^{-1}2\varepsilon/(\pi - \tan^{-1}2\varepsilon)}$ (4.52b)

关于小 ε 进行展开:

$$= e^{2/\pi}U_i\left[1 + \frac{2}{\pi}\varepsilon\left(\log s + \frac{2}{\pi}\right) + \cdots\right] \quad (4.52c)$$

二项外展开:

$$= e^{2/\pi}U_i\left[1 + \frac{2}{\pi}\varepsilon\left(\log s + \frac{2}{\pi}\right)\right] \quad (4.52d)$$

写成内变量:

$$= e^{2/\pi}U_i\left[\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + \frac{2}{\pi}\varepsilon\left(\log s + \frac{2}{\pi}\right)\right] \quad (4.52e)$$

为了得到 (4.52c) 已经利用了法则 (4.50)． 增加的最后一步 (4.51e) 或 (4.52e) 是需要的，因为要将两个结果进行比较时，必须仅以外变量或仅以内变量来表达．令 (4.51e) 同 (4.52d) 相等，得到(参看注 4)

$$U_i = e^{-2/\pi}U\left[1 + \frac{2}{\pi}\varepsilon\left(2 - \log 2 - \frac{2}{\pi}\right) + \cdots\right] \quad (4.53)$$

这就得到了内展开 (4.49) 的二阶近似. 利用式 (4.24), 取 $m=n=3$ 时进行匹配,便可得到式 (4.53) 的下面一项.

4.12 圆头翼型的平移修正法

我们再来研究圆头的奇异性,并阐述另一种修正的方法. 它可以用来引进处理奇异摄动问题的第二种一般方法, 这种方法将在第六章加以详细研究.

考虑最简单的圆头形状——抛物柱. 我们必须考察整个速度场, 因为表面速度因边界条件的转移发生了畸变. 对于头部半径为 ε^2 的抛物柱 $y=\pm\varepsilon\sqrt{2x}$, 可以从关于椭圆柱的复速度式 (4.12) 得到它的一阶复速度

$$\phi_x - i\phi_y = 1 - \frac{i\varepsilon}{\sqrt{2z}} + O(\varepsilon^2), \quad z = x + iy \tag{4.54}$$

将它同从保角映射或抛物坐标系中的分离变量法得到的精确结果

$$\phi_x - i\phi_y = 1 - \frac{i\varepsilon}{\sqrt{2\left(z - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)}} \tag{4.55}$$

进行比较,可见若将坐标原点平移 $\frac{1}{2}\varepsilon^2$, 一阶近似 (4.54) 就是精确解了. 这种方法消除了顶点处的平方根奇点, 并将它置于抛物柱内的焦点处,该处是保角映射的奇点. 由此可见, 薄翼理论给出了抛物柱准确的源分布, 但要平移其头部半径之半的距离.

这个值得注意的性质对任意形状的圆头翼型必定是近似地成立的. 因此, Munk (1922) 主张把任何翼型的前缘平移头部半径之半来修正坐标. 对于有限翼型的情况, 只是简单地进行平移显然是不正确的, 因为后缘还没有置于正确

的位置．对于图 4.2 的椭圆柱，正如无数更复杂的问题那样，把 x 坐标均匀地收缩显然在两端获得了所需的位移．为了保留复变函数论方法的优点，我们将单变量 $z=x+iy$ 进行变形．

Lighthill (1949a) 提出了下述原则以确定变形坐标：

$$\text{高阶近似不能比一阶近似有更强的奇性.} \tag{4.56}$$

上述原理可以使很大一类奇异摄动问题成为一致有效的．我们将上述原理应用于椭圆柱的薄翼展开式来加以说明．由于二阶近似的奇性已经不比一阶近似更强，因此必须研究三阶近似，所以，变形是 ε^2 量阶的，而不是 ε 量阶的．

延伸一阶近似 (4.12) 可得薄翼展开式为

$$\phi_x - i\phi_y = 1 + (\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3)\left(1 - \sqrt{\frac{z^2}{z^2 - 1}}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon^3\sqrt{\frac{z^2}{(z^2-1)^3}} + O(\varepsilon^4) \tag{4.57}$$

象抛物柱情形一样，现假定：若将 z 为稍微变形了的坐标 ζ 所代替，上述结果就是一致有效的．令

$$z = \zeta + \varepsilon^2 z_2(\zeta) + \cdots \tag{4.58}$$

式中的变形函数 z_2 是待定的，对于抛物柱它等于 $-\frac{1}{2}$．把它代入式 (4.57)，再展开成 ε 的幂级数，得到

$$\phi_x - i\phi_y = 1 + (\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3)\left(1 - \sqrt{\frac{\zeta^2}{\zeta^2 - 1}}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon^3\sqrt{\frac{\zeta^2}{\zeta^2-1}}\left(\frac{1 + 2\zeta z_2}{\zeta^2 - 1} - 2\frac{z_2}{\zeta}\right) + \cdots \tag{4.59}$$

如果令

$$z_2(\zeta) = -\frac{1}{2}\zeta \text{ 或} -\frac{1}{2}\zeta^3 \quad \text{或}\cdots \tag{4.60}$$

那么在 $\zeta = \pm 1$（以及 $\zeta = 0$）处，第三项的奇性不比第二项更强.

为了简单起见，考虑上述各种可能性的第一种情况，它给出了已经建议过的坐标的均匀收缩. 于是，一阶解就成为

$$\phi_x - i\phi_y = 1 + \varepsilon\left(1 - \sqrt{\frac{\zeta^2}{\zeta^2 - 1}}\right) \tag{4.61a}$$

其中

$$z = \zeta - \frac{1}{2}\varepsilon^2\zeta + \cdots \tag{4.61b}$$

虽然在这里我们可以通过消去 ζ 来得到显式解，但对于 z_2 任何一种别的选择都不能做到这一点. 通常，我们必须满足于其解以 ζ 为参数的隐式表示. 该近似在一阶精度内是一致有效的，可以将它同精确解

$$\phi_x - i\phi_y = 1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}\left(1 - \sqrt{\frac{z^2}{z^2 - 1 + \varepsilon^2}}\right) \tag{4.62}$$

进行比较来证明. 因为我们已经巧妙地处理了解，而不是将坐标变形引进原问题，所以，上述方法实际上是 Lighthill 方法的一种改进，这种方法是 Pritulo (1962) 提出来的（参看习题 6.4）.

将上述方法应用于一般的翼型，使 Lighthill (1951) 得到为改进圆头薄翼理论的法则 (4.30b). 然而不同于我们从前导出该法则的方法，Lighthill 方法对于尖头、方头，事实上，对于任何不同于圆头形状的翼型都是不成功的.

习　　题

4.1　流函数形式的薄翼理论. 用流函数而不用速度势，重复 4.2，4.3

节的分析. 试求椭圆翼型的解，并证明待定的源本征函数自动等于零。

4.2 匹配和最小奇性原理. 绕密切抛物柱的对称流动的局部问题(图 4.9)，具有在无穷远处有奇性的本征解，试证，最小奇性的本征解使表面速度增加一项 $[S^3/(1+S)]^{1/2}$ 的因子(譬如说，这可以引进抛物坐标 ξ，η，并求势问题 $(\xi+i\eta)$ 多项式形式解的办法来加以证明). 然后，将它同任意圆头翼型薄翼解相匹配，便可排除该本征解. 这是同最小奇性原理一致的.

4.3 同方头翼型局部解的匹配. 引进适合于图 4.7 中矩形翼型前缘的内变量. 试证: 内解为绕过厚度为 2 的半无限矩形板的流动之解. 在板的两侧，表面速度以 t 为参数来表达(Milne-Thomson, 1960, 10.6 节)

$$q=U_t\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}, \quad 其中\ \pi S=\sqrt{t^2-1}-\cosh^{-1}t$$

将它同外解(4.27)匹配，证明本征解的系数为

$$C=\frac{1}{2}-\log(4\pi/\varepsilon),$$

从而使薄翼展开式(4.2)的渐近序列从 $\varepsilon^2\log\varepsilon$ 起包含对数项.

4.4 尖头的修正法则. 对于尖头翼型，试提出一种类似于圆头翼型的 Lighthill 法则(4.30b)的修正因子法则. 讨论应用同样方法处理方头翼型、轴对称尖头细长体的前景.

4.5 双凸翼型的精确解. Milne-Thomson (1960, 6.51 节)给出了绕由两段圆弧构成的双凸翼型的对称位势流动的精确解. 试问，它们为薄翼理论中的抛物弧所代替，可准确到几阶精度? 在图 4.6 的坐标系中，精确的表面速度为(参看注 3，注 4)

$$\frac{q}{U}=\frac{4}{n^2}\frac{\cosh\eta-\cos n\pi/2}{1+\cosh 2\eta/n}$$

式中

$$x=\frac{\sinh\eta}{\cosh\eta-\cos n\pi/2}, \quad n=\frac{4}{\pi}\cot^{-1}\varepsilon$$

由上式得出内外解，并同 4.7，4.11 节的结果进行比较. 试证，若令

(4.51d) 同 (4.52e) 相等,而不是令 (4.51e) 同 (4.52d) 相等,不能导出式(4.53). 说明产生这种差别的原因,并研究其含意.

4.6 椭圆翼型的成组匹配法. 试证:不象(4.10)节那样逐步地进行匹配,我们一步就可把三项外展开(4.32)同两项内展开(4.35)相匹配.

4.7 旋成体的头部修正法则. 对于不可压缩轴对称流中的圆头旋成体,试提出一种类似于(4.30b)的法则. 利用旋转抛物面上表面速度同抛物柱上表面速度完全相同这一事实. 将该法则应用于把图 4.2 绕 x 轴旋转获得的旋转椭球. 由细长体理论可知,其表面速度为 (Van Dyke, 1959)

$$\frac{q}{U}=1+\varepsilon^2\left[\log\frac{2}{\varepsilon}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1-x^2}\right)\right]+O(\varepsilon^4\log^2\varepsilon)$$

将它同精确结果

$$\frac{q}{U}=\frac{1+\varepsilon^2(\mathrm{sech}^{-1}\varepsilon-\sqrt{1-\varepsilon^2})/\sqrt{1-\varepsilon^2}-\varepsilon^2\mathrm{sech}^{-1}\varepsilon)}{\left(1+\varepsilon^2\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)^{1/2}}$$

作比较.

同样地,为处理尖头旋成体也提出一种法则,并将它应用于把图 4.6 绕轴旋转所得的纺锤体. 细长体理论给出它的表面速度为

$$\frac{q}{U}=1+\varepsilon^2\left[2(1-3x^2)\log\frac{2}{\varepsilon\sqrt{1-x^2}}-3+11x^2\right]$$

$$+O(\varepsilon^4\log^2\varepsilon)$$

4.8 旋转抛物体的小扰动理论. 考虑绕旋转抛物体 $r=\sqrt{2\varepsilon^2x}$ 的不可压缩轴对称流动. 对于一阶摄动,导出相应于式(4.4)的问题,但相切条件不要转移到轴上. 在抛物坐标系中,用分离变量法进行求解,证明扰动是 ε^2 阶的,而不是 ε 阶的,以及

$$\phi\sim x+\frac{1}{2}\varepsilon^2\log\frac{\sqrt{x^2+r^2}-x}{\varepsilon}+O(\varepsilon^4\log\varepsilon)$$

若将原点向下游平移头部半径的一半处,验证上式是精确解.

对于 ε 阶的小 r,将上述近似进行形式展开,从而得到细长体解,并证明它满足细长体理论的近似方程 $\phi_{rr}+\phi_r/r=0$. 将完整的 Laplace

方程进行迭代的方法改进上述结果，求出二阶细长体解为

$$\phi \sim x + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \log \frac{r^2}{2\varepsilon^2 x} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left[\varepsilon^2 f(x) - \frac{r^4}{4x^2}\right]$$

利用量纲分析，以及 ε^2 是问题中唯一的特征长度这一事实来确定函数 f 的形式。这样，除了一个待定的常数乘以本征解以外，完成方程的求解过程。可把本征解解释为 Laplace 方程细长体形式的特解，同精确解作比较便可确定其常数［参看 Chang（1961）关于人工参数作用的讨论以及匹配渐近展开法的应用。若要了解绕抛物面的亚声速可压缩流动，请参看 Van Dyke(1958c)］。

4.9 亚声速薄翼理论. 对于亚声速、可压缩对称流动，试导出相应于(4.4)，(4.5)的一阶、二阶问题，其中 Laplace 方程（4.1a）用（2.19a）代替。试证，改变垂直尺度（Prandtl-Glauert 变换）把第一个问题化为等价的不可压缩流的问题。验证，二阶方程的通用的特解（参看 3.7 节）为（Van Dyke，1952）

$$M^2\left[\left(1+\frac{\gamma+1}{4}\frac{M^2}{1-M^2}\right)\phi_1 - \frac{\gamma+1}{4}\frac{M^2}{1-M^2}y\phi_{1y}\right]\phi_{1x}$$

对于波形壁 $y=\varepsilon\sin x$，试计算二阶解。由

$$C_p = -2\varepsilon\phi_{1x} - \varepsilon^2[(1-M^2)\phi_{1x}^2 + \phi_{1y}^2 + 2\phi_{2x}] + \cdots$$

算出表面压力系数，并验证它满足翼型的二阶相似律（Hayes，1955）：

$$\text{若 } M=0 \text{ 时，} C_p = \varepsilon C_{p1}(x) + \varepsilon^2 C_{p2}(x) + \cdots$$

那么对 $M \geq 0$ 时，

$$C_p = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-M^2}}C_{p1}(x) + \varepsilon^2\frac{(\gamma+1)M^4 + 4(1-M^2)}{4(1-M^2)^2}C_{p2}(x) + \cdots$$

第五章 匹配渐近展开法

5.1 历史介绍

前面一章，我们引进了处理奇异摄动问题的一种方法。这种方法是 Prandtl 边界层理论 (1905) 的推广，过去叫"内外展开法"或"双重渐近展开法"。我们还是按照 Bretherton (1962) 的意见，称它为**匹配渐近展开法**。

作为这种方法基础的思想经过多年发展，已经成熟。五十年代，Friedriechs (1953, p. 126; 1954, p. B-184) 和他的学生应用过这种方法；在加州理工学院，它获得了系统的发展，并被应用到粘性流动的研究中去；关于边界层理论，Kaplun (1954) 采用了形式的内外极限过程及其相应的内外展开式；以后，Kaplun, Lagerstrom (1957) 在研究小 Reynolds 数流动时，对匹配过程进行了深入的分析 (也可参看 Lagerstrom, 1957)；为了对如何解决小 Reynolds 数平面流动的 Stokes 佯谬有一个更深刻的了解，Kaplun (1957) 利用了这些思想。Lagerstrom 和 Cole (1955) 比较了边滑动、边膨胀圆柱的 Navier-Stokes 方程的新精确解来评价这种方法。Coles (1957) 把这种方法用于可压缩边界层的某些特解。

Proudman 和 Pearson (1957) 使用这种展开方法处理了小 Reynolds 数下绕圆球和圆柱的流动。首先把半无限平板的 Blasius 边界层解进行正确推广的是 Goldstein (1956, 1960) 和 Imai (1957a)。Ting (1959) 解开了介于两股不同速度流体间的粘性剪切层之谜(参看注 16)。

在这个发展时期以后，匹配渐近展开法被应用到各种流

体力学问题中去．早期的应用大多是针对粘性流动．譬如 Germain 和 Guiraud (1960, 1962), Chow 和 Ting (1961) 计算了曲率对激波结构的影响．Murray (1961) 和 Ting (1960) 发现了外流中的涡对于平板前缘附近或远离前缘处边界层的影响．Chang (1961) 阐明了远离有限物体处粘性流动的行为．Breach(1961), Rubinow 和 Keller(1961), Bretherton (1962) 等分别分析研究了小 Reynold 数下，绕椭球、自旋圆球以及剪切流中圆柱的流动．

这个方法同样可以成功地解决无粘流问题．前章举了不可压缩流动的例子；Cole 和 Messiter (1957) 研究了绕细长体的跨声速流动．虽然这种方法在苏联使用得不那么普遍，但 Bulakh (1961) 用它改进了激波附近的线性化超声速锥型流及其高阶近似；同样地，Fraenkel 和 Watson (1964) 研究了绕三角机翼的"伪跨声速流"，这种流动发生在激波接近于前缘的情况．Yakura (1962) 分析了高超声速流中，因物体小钝头引起的熵层．

1960 年以后，这种方法在流体力学的很多领域及应用力学其它分支中的应用骤增．本书的后面几章讨论了某些新近研究的例子．

5.2 直接展开的非一致性

在详细研究匹配渐近展开法以前，我们来探讨一下奇异摄动问题究竟是怎样发生的，这是不无益处的．产生非一致性的根源是什么？对于某一给定的物理问题，我们能否预见它会导致正则摄动问题，还是奇异摄动问题？

Prandtl 边界层理论中关于产生奇异性典型的"迹象"——一个小参数乘以微分方程的最高阶导数之一——是大家所熟悉的．若采用直接摄动法，由于一阶近似中乘以小参数的导

数项被略去了，方程就降阶了。因此，必须放弃一个或若干个边界条件，在规定这些边界条件之处，近似解失效。原先的边界条件同退化的方程恰好相容的情况是例外。

我们来考察作为数学模型的那些线性微分方程往往是有益的，这些数学模型可以用来说明更复杂一些问题的主要特性。Friedrichs (1942) 给出了说明边界层理论中失去最高阶导数项的简单模型：

$$\varepsilon\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{df}{dx}=a,\quad f(0)=0,\quad f(1)=1 \tag{5.1}$$

其精确解为

$$f(x;\varepsilon)=(1-a)\frac{1-e^{-x/\varepsilon}}{1-e^{-1/\varepsilon}}+ax \tag{5.2}$$

可是，若令 $\varepsilon=0$，微分方程就退化成一阶的。除非 $a=1$，两个边界条件不能都得到满足。精确解表明，我们必须放弃 $x=0$ 处的边界条件。这时，ε 为小量时的近似解为

$$f(x;\varepsilon)\sim(1-a)+ax \tag{5.3}$$

如图 5.1 所示，除了在 $x=O(\varepsilon)$ 的"边界层"内，这是一个良好的近似解。令

$$f(x;\varepsilon)=F(X;\varepsilon),\quad X=\frac{x}{\varepsilon} \tag{5.4}$$

从而引进一个适用于该区域的放大了的内坐标，原先的问题 (5.1) 就变成

$$\frac{d^2F}{dX^2}+\frac{dF}{dX}=a\varepsilon,\quad F(0)=0,\quad F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=1 \tag{5.5}$$

如果我们现在令 $\varepsilon=0$，满足内边界条件的微分方程的解是 $(1-e^{-X})$ 乘以一个任意常数。硬性规定它要满足外边界条件，得出该常数因子应为 1。但是，精确解表明上述结果是错误的。正如外解必须放弃内边界条件一样，内解必须放弃外边界条件，而改成用匹配原理 (4.36) 使内解必须同外解相匹

配的条件. 这样，我们就得到了小 ε 时一致有效的一阶近似解:

$$f(x;\varepsilon) \sim \begin{cases} (1-a)+ax, \text{固定 } x>0, \text{令 } \varepsilon \to 0 & (5.6a) \\ (1-a)(1-e^{-X}), \text{固定 } X=\dfrac{x}{\varepsilon}, \text{令 } \varepsilon \to 0 & \end{cases}$$

(5.6b)

在奇异摄动问题中，只是在多数情况下会出现丢失最高阶导数项的“迹象”，但不是非得如此不可。在第四章的薄翼理论中，非一致性不是由微分方程，而是由边界条件引起的。对于小 Reynolds 数的粘性流动，Stokes 近似方程中的最高阶导数项同

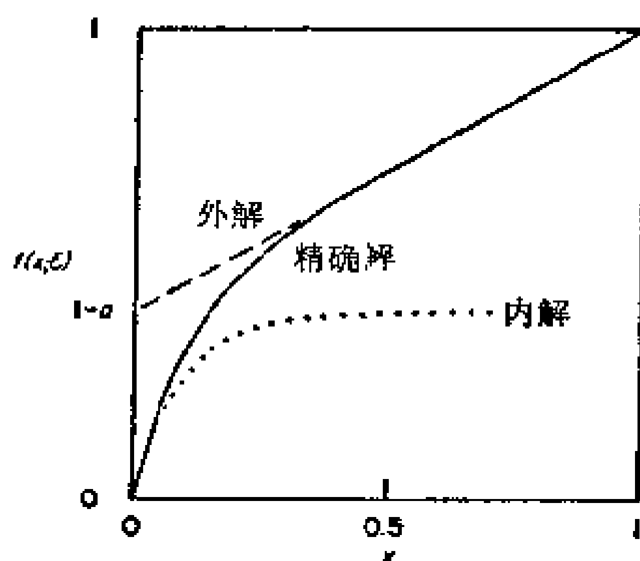


图 5.1　数学模型的解.

样也都被保留下来了，它的非一致性同流场是无限的有关。有一个标志非一致性的更为可靠的准则，显然是十分有用的。

5.3　一致性的物理判据

在物理问题中，可以在量纲分析基础上得到出现奇异性更一般的“迹象”。我们已经看到，特殊的边界条件会抑止固有的非一致性，所以，只能给出判断非一致性的必要条件，而不是充分条件。因此，换一种说法，我们提出如下从正面检验一致性的法则:

“如果摄动参数 ε 不是两个长度或两个时间的比值，那么其摄动解关于空间和时间坐标是一致有效的.”　(5.7)

可以首先考虑参数摄动来理解这一判据。 用叫做"主参考长度"的典型的大尺度来表达问题的几何特征。 第二章中那些例子的主参考长度是圆柱半径，第四章中薄翼的主参考长度是弦长。这个长度自然是构成无量纲坐标的基础——在不定常流中还需要特征速度——它们就是进行直接展开的外变量。仅当问题中还有一个副参考长度，且当 $\varepsilon \to 0$ 时，它同主参考长度的比值趋于零或无穷时，才有可能发生非一致性。如果选得适当，上述第二个长度就是内变量的基础。

绕圆头薄翼的位势流动包含两个不同的特征长度，这是大家所熟悉的问题。除了在前缘附近，头部半径起主导作用外，可用弦长来表达翼型的几何特征。因为这两个长度的比值以厚度比的平方律趋于零，根据我们的法则 (5.7)，薄翼解可能有奇性。在第四章，我们看到，这种可能性成了现实，弦长和头部半径分别是构成外变量和内变量的基础。

我们的判据说明，一个坐标摄动不能保证其余坐标不出现非一致性。 后者可以用主参考长度或摄动坐标无量纲化，因为该两个长度之比趋于零或无穷，它们提供了内、外展开的尺度。

以下是仅包含一个特征长度的参数摄动的例子，因此，根据我们的判据，它们肯定是正则的。稍可压缩流体绕圆柱的流动，其唯一的特征长度是半径，摄动参数是速度比或能量比，而不是长度比 (2.4 节)。 位势流中略有畸变的圆柱包含两个特征长度，但它们是相同数量级的，当 $\varepsilon \to 0$ 时，其比值趋于 1，而不是趋于零或无穷 (2.3 节)。

下述参数摄动问题包含两个不同的长度，因此确实呈现了奇异性(图 5.2)。升力机翼的特征长度是弦长和翼展长，在 Prandtl 升力线理论中，它们的比值趋于零(参看 9.2 节)；而在细长体近似中，它们的比值趋于无穷。粘性流动中的物体

不仅用几何长度，而且也用粘性长度 ν/U 来反映它的特性，它们的比值是 Reynolds 数。对于 Stokes 流动，Reynolds 数趋于零(第八章)，而在边界层理论中，它又变成无穷大(第七章)。上述这个例子说明，副参考长度不一定总是几何长度。

以下是奇异坐标摄动的一些例子(图 5.2)。绕锥或楔(包括平板)的粘性超声速流动可以在离顶点比粘性长度 ν/U 大得多的范围处近似求解。象小钝头效应一样，可以用特征松弛长度来处理有振动松弛和化学反应的气体流动。物体在粘性流体中的突然起动可以展开为时间的幂级数，该时间是以特征长度和特征速度之比为参考量*。远离物体处的粘性流动可以展开成以典型的尺度为参考长度的半径负次幂的级数。

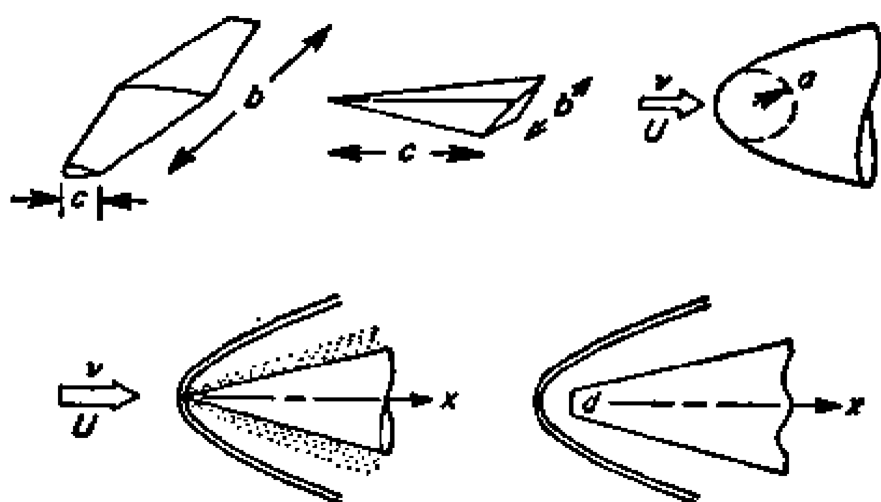


图 5.2 包含两个不同长度的奇异摄动问题。

虽然下面的例子中有两个不同的长度，但它们仍然是正则摄动问题。绕过波形壁，尖头翼型和任意无驻点薄体的位势流动是厚度参数的正则摄动。因为在式(2.11)中摄动解同基本解的比值以 εr 的量阶增加，所以均匀剪切流绕圆柱的流动(2.2 节)表面上看来有在无穷远处会出现非一致性的

* 原文有误。——译者

"迹象". 但是,由于其结果是精确的，所以也是一致有效的。然而,任何别种形式的剪切分布就会导致非一致性(习题 2.4，5.7). 对于在无粘性溶体中突然起动的情形,远离物体处流动的展开式是正则的. 如果用刚好以位势流动的速度移动的可伸缩的表面来代替固定壁面，甚至最典型的 Prandtl 边界层的非一致性也会消失.

一个问题可能包含与多重极限过程有关的两个以上的不同长度,那么就可能发生多重非一致性. 要是分为三层,我们可以称它们为外展开、中展开、内展开. 在大 Reynolds 数下，大或小 Prandtl 数的粘性流动就是一例,这时,温度边界层可以比粘性边界层厚得多或薄得多. 9.9 节分析了无粘流的例子.

坐标摄动有时可以用参数摄动来代替. 譬如：远离钝楔头部(图 5.2)的展开式可以看作头部厚度趋于零时，有限长楔的解(9.9 节). 在锥形几何状物体中，角度起了长度的作用. 因此，若摄动参数是两个角度之比，就可能发生非一致性. 扁椭圆锥的直接摄动解象薄翼理论一样，显然在前缘附近失效，无限小攻角的圆锥在其表面附近出现 Ferri 涡层(1950)，这些都是例子.

5.4 合成展开和内展开的作用

我们已经看到，奇异摄动问题的特点是包含两个不同的长度,因此,以主参考长度为特征长度的直接摄动解在以副参考长度为有关尺度的区域内不成立. 副参考长度不总是显而易见的长度. 对于大展弦比薄翼来说是弦长，对于平头机翼来说是厚度,对于小 Reynolds 数流动来说是粘性长度，这是很明显的. 然而,在大 Reynolds 数下，它是粘性长度和几何长度乘积的平方根. 对圆头翼型来说，不是厚度而是头部半

径，它正比于厚度与弦长之比的平方．超声速薄翼（6.4 节）则是翼型的平均曲率半径，它同厚度与弦长之比的平方成正比．亚声速流中尖头翼型是介于一致有效与非一致有效之间的微妙情况，其非一致性区是指数型小的，而同任何物理长度没有直接关系．同样的说法也适用于绕有攻角圆锥的超声速流动的涡层．

直接摄动解得到如下形式的渐近展开式：

$$f(x, y, z; \varepsilon) \sim \sum \delta_n(\varepsilon) f_n(x, y, z),$$
$$x, y, z \text{ 固定}, \ \varepsilon \to 0 \qquad (5.8)$$

式中 $\delta_n(\varepsilon)$ 是合适的渐近序列，x, y, z 是用主参考长度无量纲化的坐标．只要函数 f_n 是正则的，上述展开式就成立；在流场中，现象由副参考长度而不是由主参考长度支配的任何地方，上述展开式就有奇性．为了使展开式是一致有效的，修正的展开式必定也依赖于用副参考长度无量纲化的坐标．因为主、副参考长度之比是 ε 的函数，这也就等于说是依赖于 ε 的．于是，一致有效的展开式必定具有更复杂的形式：

$$f(x, y, z; \varepsilon) \approx \sum \delta_n(\varepsilon) g_n(x, y, z; \varepsilon),$$
$$\varepsilon \to 0 \text{ 时，一致有效} \qquad (5.9)$$

现在，因为摄动参数 ε 不仅显含在渐近序列 $\delta_n(\varepsilon)$ 中，也隐含在函数 g_n 中，这就不是普通意义上的渐近展开式了．我们称它为合成展开．Erdélyi（1961）联系到奇异摄动问题时，讨论过这种展开式，并称它为“广义渐近展开”．用合成展开讨论问题有两个缺陷：首先，它不便于运算，显然象令 ε 同次幂相等这类大家所熟知的运算得重新考虑；以后还会看到，合成展开式不是唯一确定的．其次，它不必要地将直接展开和非一致性区的复杂性纠缠在一起了（参看 10.3，10.4 节）．

构造一个在其邻域中成立的补充的内展开，把同非一致性有关的困难分离出来，较为简单．可以引进在非一致性区

量阶为 1 的内坐标来达到目的．于是内展开的形式为

$$f(x, y, z; \varepsilon) \sim \sum \Delta_n(\varepsilon) F_n(X, Y, Z)$$

$$(X, Y, Z \text{ 固定}, \varepsilon \to 0) \tag{5.10}$$

我们总用大写字母来表示内变量．这里，允许渐近序列 $\Delta_n(\varepsilon)$ 同外展开的渐近序列 $\delta_n(\varepsilon)$ 不一样，但它们往往是完全相同的． 6.3 节举了一个例子，这个例子的两个渐近序列是不相同． 如果非一致性区是有限平面上一点的邻域，内坐标 x, y, z，通常用副参考长度无量纲化；如果象边界层理论那样，非一致性发生在一条线上，那么只需改变法向坐标即可；如果非一致性发生在无穷远处，沿着不同的方向，坐标常常用 ε 不同的函数来进行伸缩．内展开同外展开一样，是个普通的渐近级数，所以通常的运算是合法的．

除了自变量外，引进在内外区数量级为 1 的因变量，从而使渐近序列 δ_m 和 Δ_n 中的主项为 1 ，这往往是有用的准备工作．一般说来，自变量和因变量的伸缩程度是不同的．按照 Kaplun (1954), Lagerstrom 和 Cole (1955) 的办法，我们作如下定义，以便使这种方法规范化：

外变量：以问题中主参考量为基础的自变量和因变量；

外极限：外变量固定，摄动参数趋于零时的极限；

外展开：外变量固定， $\varepsilon \to 0$ 时的渐近展开． 在原则上，由精确解对适当的外渐近序列逐次运用外极限过程获得．

内变量：在外展开的非一致性区，为 ε 适当的函数伸缩了的，量阶为 1 的自变量和因变量；

内极限：内变量固定， $\varepsilon \to 0$ 时的极限；

内展开：内变量固定， $\varepsilon \to 0$ 时的渐近展开． 在原则上，它可以由精确解对适当的渐近序列逐次应用内极限过程获得．

合成展开：任意一个级数，要求当 $\varepsilon\to 0$ 时，若用外变量进行展开它就化成外展开，用内变量展开时，它就化成内展开.

匹配两个互补的渐近展开式的方法，把奇异摄动问题化成尽可能简单的基本问题. 要是发现求解第一个内问题是"不可能"的，那么可以认为该问题本身不太好处理. 譬如，把第四章的薄翼理论推广到亚声速可压缩流的情况，对于圆头薄翼而言，显然会导出绕抛物柱亚声速流的内问题，而对这个问题的完整解还是一无所知的. 又如，在大 Reynolds 数下，绕尖头翼型的粘性流动归结成绕半无限平板粘性流动的内问题，而该问题只有部分解. 本方法的优点是：即使在这些"不可能"的情况下，还可以利用数值解，甚至利用实验测量结果作为内解. 因此，Prandtl 在升力线理论中，主张利用翼型的实验数据来作为 9.2 节中将要看到的内解.

5.5 选择内变量

选择内变量是匹配渐近展开法的关键步骤. 我们面临着如下几个问题：

(*a*) 哪个自变量应该被伸缩?

(*b*) 它们应怎样被伸缩?

(*c*) 因变量应如何伸缩?

要回答第一个问题取决于对问题奇异性质的认识，包括非一致性区的位置和形状——也就是说，非一致区究竟是一个点、一条线还是一个面的邻域呢?

若能计算若干项外展开，所需的伸缩程度通常很明显. 譬如说，在 4.4 节中椭圆柱的形式薄翼解在离前缘 ε^2 阶距离的范围内不成立，内坐标应相应地放大. 问题中的副参考长度可以作为合适的伸缩尺度，对于问题物理上的了解可以说明并

证实这一点。

此外，可以用试凑法获得伸缩的尺度．主要原则是：内问题应该具有可能的最小退化程度；它必须把一阶外解中略去的，必不可少的因素包括在一阶近似中；内外解要能匹配．举例来说，考虑问题(5.1)．如果仅试凑自变量的任意伸缩，我们假定

$$f(x;\varepsilon)=F(X;\varepsilon),\qquad X=x/\sigma(\varepsilon)\tag{5.11}$$

问题就化成

$$\frac{d^2F}{dX^2}+\frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon}\frac{dF}{dX}=\frac{\sigma^2(\varepsilon)}{\varepsilon}a,\quad F(0)=0,$$
$$F\left(\frac{1}{\sigma}\right)=1\tag{5.12}$$

因为取外极限时，略去了最高阶导数项，所以取内极限时，$\frac{d^2F}{dX^2}$ 必须保留下来．这就是说，因子 $\sigma(\varepsilon)/\varepsilon$ 乘以 dF/dX 当 $\varepsilon\to0$ 时必须不等于无穷大．如果 $\sigma(\varepsilon)/\varepsilon$ 等于零，满足内边界条件(该边界条件必须保留)的解为 X 乘以一个常数，但它不能同外解(5.3)相匹配．余下的可能性就是 $\sigma(\varepsilon)/\varepsilon$ 趋近于常数，这也就得到了最小退化的微分方程．不失一般性，可取该常数为1．于是得出了以前的结果(5.4)和(5.5)．这个例子不需要对因变量进行伸缩，因为第一个内问题是齐次的．但一般说来，在伸缩每个自变量时，必须允许伸缩每个因变量．

象上述例子那样，内变量几乎总是用线性伸缩法获得，有攻角圆锥的涡层是例外 (Munson, 1965)，这一点可用下述模型来加以说明：

$$x^m\frac{df}{dx}-\varepsilon f=0,\qquad f(1)=1\tag{5.13}$$

用迭代法或代入一个 ε 的幂级数得到直接(外)摄动解：

$$f(x;\varepsilon) \sim 1 - \frac{\varepsilon}{1-m}(x^{1-m}-1) + O(\varepsilon^2)$$

$$(m \neq 1) \tag{5.14a}$$

$$\sim 1 + \varepsilon \log x + O(\varepsilon^2) \quad (m = 1) \tag{5.14b}$$

对于 $m \geqslant 1$ 的情况，上述解在 $x=0$ 处有奇性；对于 $m \leqslant 1$ 的情况，则在 $x=\infty$ 处有奇性．看来 $m \neq 1$ 时，合适的内坐标很可能是

$$X = x\varepsilon^{-1/(m-1)} \tag{5.15}$$

可以考察所得到的内方程

$$X^m \frac{df}{dX} - f = 0 \tag{5.16}$$

或考察精确解

$$f(x;\varepsilon) = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1-m}\right)\exp\left(\frac{\varepsilon x^{1-m}}{1-m}\right),$$

$$m \neq 1 \tag{5.17a}$$

$$= x^{\varepsilon}, \quad m = 1 \tag{5.17b}$$

来证实这一点．

对于 $m=1$ 的特殊情况，(5.14b) 表明，原点附近的非一致性区犹如指数型小的：$x = O(e^{-1/\varepsilon})$．因此，可以像 4.7 节尖头翼型的情况一样，假设合适的内变量由相应的线性伸缩加以确定：

$$X = xe^{1/\varepsilon} \tag{5.18}$$

然而，这样一来使变换后的微分方程

$$X\frac{df}{dX} - \varepsilon f = 0 \tag{5.19}$$

保持不变，所以简单伸缩法失效．精确解 (5.17b) 表明，由非线性变换

$$X = x^{\varepsilon} \tag{5.20}$$

确定合适的内坐标。它将微分方程变换为

$$X\frac{df}{dX}-f=0 \tag{5.21}$$

看来，如果在指数型小的区域中，其非一致性不是由边界条件而是由微分方程中的 $X\frac{\partial}{\partial X}$ 型的齐次算子引起的，这就要使用分数幂变换。

5.6 匹配的作用

匹配渐近展开法必定要放弃一些边界条件。不能要求外展开满足内区的边界条件；反之，内展开一般也不满足远处的边界条件。椭圆翼型的内解（4.10 节）恰好满足上游边界条件的情况是例外，尖前缘翼型的内解就不是如此（4.11 节）。因此，无论是内展开还是外展开，一般只有不足的边界条件可资利用，缺少的边界条件则利用将两个展开式进行匹配的方法来提供。

对于偏微分方程，应用最小奇性原理是匹配的前提（4.5 节）。经验证明，在允许的解中，只有在非一致性区域中具有最小奇性的解才能同补充的展开式相匹配。例如，在 4.9 节我们看到，圆头薄翼的内解是绕密切抛物面的对称流动。图 5.3 图示了无数种可能性中的头两种情况。然而，除了第一种情况外，所有情况都得出在无穷远处的速度是无穷大，因此，不能同薄翼展开式相匹配（习题 4.2）。

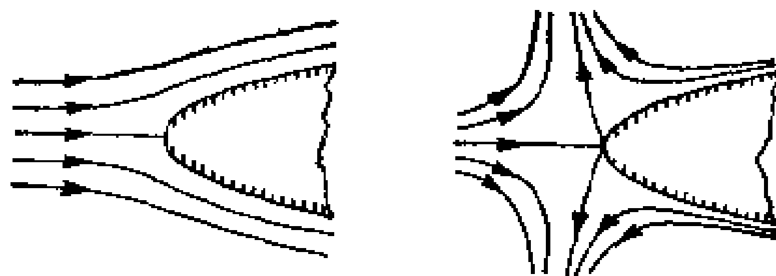


图 5.3 绕抛物柱不同的对称流动。

虽然最小奇性原理往往可以减少可能性的数目，但总不能定出唯一的流谱．例如，对于圆头翼型，上述原理排除了线性近似中出现源本征解的可能性．但对二阶近似则不然．这是因为源本征解必定会出现在仅在前后缘附近同椭圆翼型略有不同的光滑翼型的二阶外解中，实际情况应该如此（图5.4）．

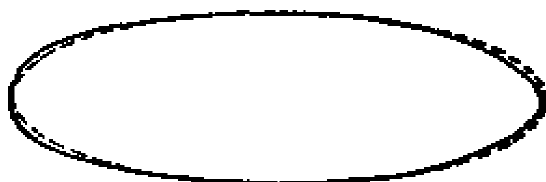


图 5.4 同椭圆柱有相同线性解的翼型．

匹配是这个方法的主要特性．匹配的可能性取决于存在一个内、外展开式均有效的重叠区．利用这种重叠性，我们可以得到有限部分和间的准确的关系式．这仅对关于坐标非一致有效的参数摄动问题或关于其它坐标非一致有效的坐标摄动问题，可以有显著的成效．我们不能匹配两个不同的参数摄动展开，例如不能匹配大、小 Reynolds 数的展开式或高、低 Mach 数的展开式．我们也不能匹配两个不同的坐标展开式，例如大、小时间或距离的展开式．这种级数可以在有共同收敛区这个意义上重叠，而解析延拓过程仅仅是从任意多有限项的表达式来获得近似关系(参看 10.9 节)．

匹配法也可以同所谓数值拼接法（*patching*）进行对比．这种方法是用硬性规定两个级数在任一中间界面上的值相等，或若干阶导数值相等的办法，把它们连接起来．虽然，其结果可能有实用价值——甚至在数值上同匹配法的结果没有什么差别——拼接法通常并不简单，而从审美观上也是不能令人满意的．还有，在高阶近似中，匹配法比拼接法更有系统．我们认为，只要在可以用匹配法来代替拼接法的场合，应该避免使用拼接法．匹配法使人不知不觉地把两个解光滑地

连接起来了.

5.7 匹配原理

存在重叠区隐含着这样的结论：外展开的内展开应该在一定的量阶范围内同内展开的外展开相一致（Lagerstrom, 1957）。上述一般的匹配原理可以有几种特定的表述方式.文献使我们看到，选择什么样的匹配原理多少取决于研究人员的爱好(参看注 5).

Prandtl 在把边界层近似解同无粘性外解匹配时，巧妙地运用了所谓极限匹配原理：

$$\text{(外极限的)内极限}=\text{(内极限的)外极限} \tag{5.22}$$

这个原始的法则是否正确，或能否取得成功，不仅取决于问题的性质，也取决于待匹配的自变量的选择. 这个法则对边界层的切向速度来说，显然是成立的. 当自变量增大时，它趋于无粘流的表面速度. 然而，对于法向速度和流函数来说，上述法则不成立，式(5.22)中第一个累次极限为零，而第二个累次极限为无穷. 在小 Reynolds 数下的平面流动中，也会发生同样的困难(第八章).

我们可以更准确地描述待匹配变量的极限性态来改进这个简单的法则(参看 3.2, 3.3 节). 我们不用纯粹的极限过程，而用渐近表达式，从而导出下述匹配原理：

$$\text{(外表示的)内表示}=\text{(内表示的)外表示} \tag{5.23}$$

这里，外(内)表示就是用外(内)变量表达的渐近展开式中第一个非零项. 当极限原理(5.22)仅给出平凡解时，上述原理为我们提供了匹配条件. 譬如，在 8.7 节中我们将看到，时于小 Reynolds 数下的平面流，用这个原理就够了.

在渐近展开式中再保留几项，便可把这个原理推广到高阶近似. 我们必须允许内展开和外展开的项数不同，因为规

范化的匹配次序(5.9 节)要求在偶数步内、外展开式的项数相差一项. 于是，我们就得到了第四章引进的渐近匹配原理(参看注 4):

$$(n \text{ 项外展开的})m\text{项内展开} = (m \text{ 项内展开的})n \text{ 项外展开} \tag{5.24}$$

式中，m 和 n 是两个任意整数. 实际上，m 常取为 n 或 $n+1$.

上述原理对于任何一个能应用匹配渐近展开法取得成功的问题来说，看来是足够了. 本书通篇都要应用这个原理. 但在下面一节，我们要阐述另一条原理，它可以使我们对重叠区的性质有一个更深入的了解.

5.8 中间匹配

在薄翼理论(第四章)取外极限的过程中，当厚度比趋于零时，某点离开前缘保持一个固定的距离；而在椭圆翼型取内极限的过程中，该距离以 ε^2 律减小. 这两个极限过程的次序可以互换，这并不是显而易见的，因为内外区间存在着一个间隙. 考虑一个点，它离开头部的距离以 ε 的量阶减少(图 5.5). 最后，该点既在前缘的邻域以外，又不在外解有效的区域之内. 这就可以明白，这种间隙是存在的.

为了填补这个间隙，Kaplun (1955) 引进了介于内外极限间的中间极限连续统的概念. 虽然他考虑了非常一般的极限过程，为了说明问题起见，仅研究同小参数幂次方有关的极限过程就足够了. 若 s 是外变量，在 $s=0$ 处是非一致有效的. 我们引进中间变量(参看注 5)

$$\bar{s} = \frac{s}{\varepsilon^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < \alpha_i \tag{5.25}$$

这里，若 $\alpha = 0$ 得到外极限，$\alpha = \alpha_i$ 得出内极限. 例如，椭

圆翼型的 $\alpha_l = 2$. 当 $\tilde{s}$ 固定，$\varepsilon \to 0$ 时的极限叫中间极限；对于合适的渐近序列，重复应用中间极限过程，便可得到中间展开式。

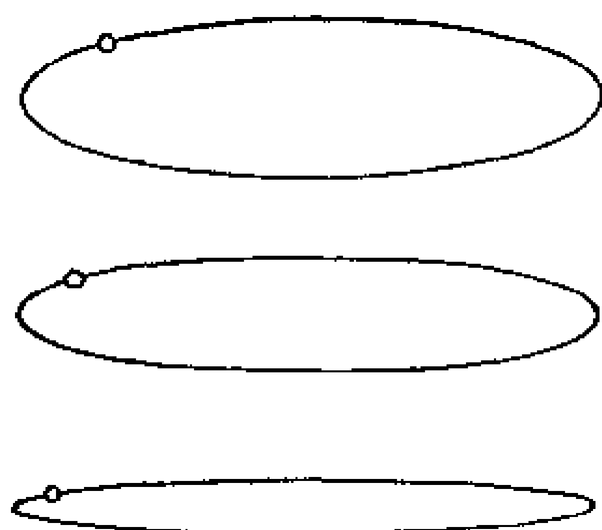


图 5.5 椭圆翼型的中间极限过程.

对于微分方程和边界条件进行中间极限过程，可导出中间问题. 虽然我们已经引进很多种极限过程，但它们仅导出几个不同的问题. 所有中间极限，从本质上讲只能得到一个中间问题，它往往同内问题完全相同. 譬如，在椭圆翼型的方程 (4.33a) 中，令 $\tilde{s} = s/\varepsilon^{\alpha}$，$\tilde{y} = y/\varepsilon^{\alpha}$，当 $\varepsilon \to 0$ 时得

$$\tilde{y} \sim \pm \varepsilon^{1-\alpha/2} \sqrt{2\tilde{s}} \tag{5.26}$$

于是，中间问题就是绕头部半径为 $\varepsilon^{2-\alpha}$ 的抛物柱的对称流动。

中间问题的解叫中间解. 它同完整解之差在取中间极限时必须一致地趋于零. 所以，由式 (4.28) 可知，椭圆翼型表面速度的中间解为

$$q \sim U_i \sqrt{\frac{\tilde{s}}{\tilde{s} + \frac{1}{2}\varepsilon^{2-\alpha}}} \tag{5.27}$$

因为结果在驻点附近不是一致有效的，所以分母不能展开．这个例子说明，中间解不一定是完整解的中间极限——这里它就是 U_i——可能它具有更复杂的结构．

虽然内外极限间的间隙已由中间解来填补，但重叠区的存在还不是显而易见的，Kaplun 延拓定理（extension theorem）保证了这一点．该定理说，内外极限的有效范围至少可以刚刚延拓到中间区．我们不去证明这条定理，其正确性在一些特例中是很明显的．这样，我们便在一端将中间展开同外展开相匹配，在另一端则同内展开相匹配．中间展开常常同内展开完全相同，（正如椭圆翼型的例子那样）或者作为特例被包括在内展开中．这时，我们可以在外重叠区，直接将内外展开式相匹配．

匹配要求在重叠区中，外(或内)解同中间解之差取中间极限时等于零，所以，对椭圆翼型，考虑

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\ \tilde{s}\text{ 固定}}\left[U - U_i\sqrt{\frac{\tilde{s}}{\tilde{s}+\frac{1}{2}\varepsilon^{2-\alpha}}}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[U - U_i + O(\varepsilon^{2-\alpha})\right] \tag{5.28}$$

来将中间解 (5.27) 同外区的均匀来流相匹配． 若 $U_i = U$，$\alpha < 2$，上式等于零．因此，外重叠区为 $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$．

我们称上述法则在高阶近似中的推广为中间匹配原理：

在某重叠区，外(或内)展开同中间展开之差的中间展开，必在准确到适当的量阶的意义上等于零． (5.29)

譬如，考虑椭圆翼型速度的中间展开和外展开的两项，在外展开中，允许有源本征解 (43a)．两个展开式之差以中间变量来表达为

$$D = U\left[1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon C_1}{2\varepsilon^{\alpha}\tilde{s} - \varepsilon^{2\alpha}\tilde{s}^2}\right]$$

$$
- U_i \sqrt{\frac{\bar{s}}{\hat{s} + \frac{1}{2}\varepsilon^{2-\alpha}}} \tag{5.30}
$$

展开上式得

$$
D \sim U(1+\varepsilon) - U_i + C_1 U\left(\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{2s} + \frac{\varepsilon}{4}\right) + O(\varepsilon^{1+\alpha}, \varepsilon^{2-\alpha}) \tag{5.31}
$$

若 $U_i = U(1+\varepsilon)$，$C_1 = 0$，$0 < \alpha < 1$，到 ε 一阶项为止，(也就是说，准确到 ε 二阶项)上式等于零．前两个结果曾在第四章中用匹配渐近法得到过，第三个结果表示，外重叠区已经缩小为原先宽度的一半．

5.9 匹配的顺序

上面的全部论述都认为内、外极限是完全对等的，因而，两个术语完全可以互相通用．不过，迄今我们使用“外”，总是指直接的或基本的近似，我们仍然沿用这个习惯．更确切地说，我们这样来规定术语，使一阶外解与内解无关．可以考虑每个解发生一阶变化，看另一个解是否受到影响来加以检验．例如在薄翼理论中，将头部半径加倍仅使来流受到一个小扰动，而把来流速度加倍却使头部附近的流动发生剧变．

一般说来，匹配必须按图 5.6 中实箭头所示的方向逐步进行．基本解支配着内解，内解反过来又对外展开以次要的影响，如此等等．譬如在边界层理论正问题中，上述顺序是不能违反的．

有时可以“短路”这个正常的匹配顺序，初值问题就是明显的例子．这时，所有的边界条件都规定在外区．于是，我们就可以如图 5.6 虚箭头所示，计算无限项的外展开．然后再同内展开相匹配来完成求解过程． 在流体力学的反问题中，

可以发生这种情况，在 9.9 节中举了一个例子.

内展开的类似情况发生在非一致性很弱，以致它对外流没有影响更微妙的情况. 4.7，4.11 节的双凸翼型就是一例. 另一方面，图 4.5 关于圆头翼型的例子说明，在必须借助于同内解进行匹配以前，只能计算两项.

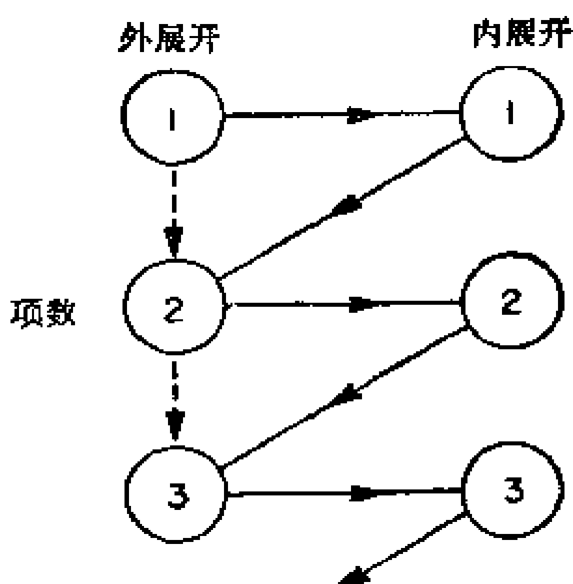


图 5.6　内外展开式的匹配顺序.

若遵循着上述标准顺序，匹配法就会得出在渐近序列中所出现的每一项，因而不必事先进行猜测. 譬如，将椭圆柱的任意项薄翼展开式 (4.14b) 用内变量来表达，并对小 ε 进行展开，这就告诉我们：每一步内展开的次项是 ε 高一次幂量阶的. 在 6.3 节中，我们讨论了内、外展开式有不同渐近序列的例子.

5.10　合成展开的构成

用内外展开式表示奇异摄动问题的解时，会产生这样一个棘手的实际问题，即从什么地方开始，由一个展开式过渡到另一个展开式. 取两条曲线的交点为过渡点是拙劣的办法，其结果会有角点，这是不合逻辑的. 况且，以椭圆翼型为例，其表面速度的一阶内外解根本不相交(图 5.7).

幸而两个展开式有一个公共的适用区，因此，容易由这两个展开式构造一个单一的一致有效的展开式. 其结果必然要比构成它的内外展开式都要复杂. 事实上，它就是 5.4 节意义上的合成展开. 在原则上，有各种不同的构造方法，因为

合成展开不是唯一的，其结果也可以不相同，但它们在所保留量阶的精度上都是等价的.

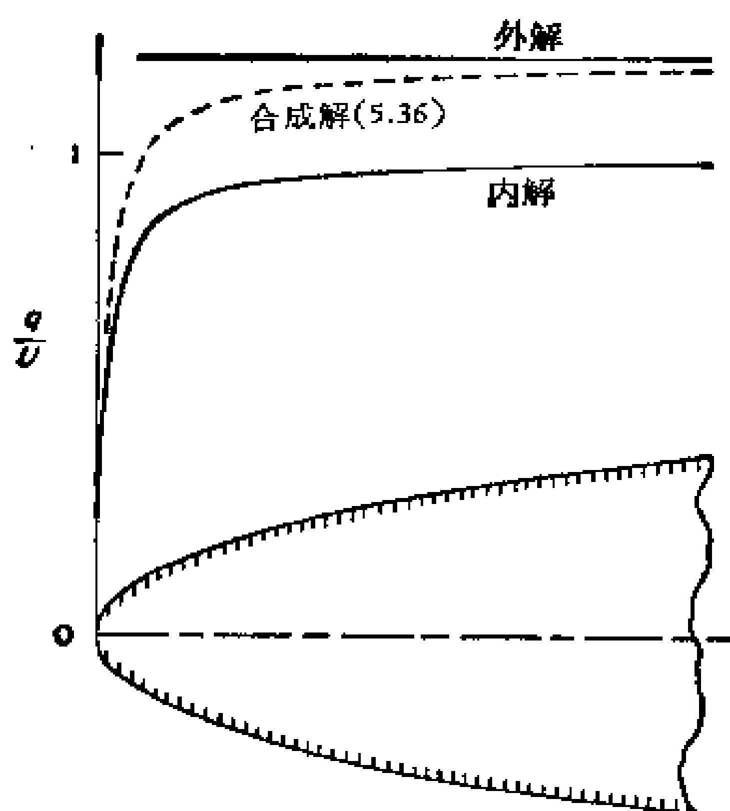


图 5.7 椭圆薄翼表面速度的一阶内外解.

在实际应用中，有两种本质不同的方法．第一种叫加法合成．把内外展开式的和再减去他们的公有部分以免重复计算两次来加以修正．有时，公有部分可用观察法确定．否则，它可以作为外展开的内展开，或内展开的外展开算出．于是，若用明显的记号来表达，加法合成法则为

$$f_c^{(m,n)} = \begin{cases} f_i^{(m)} + f_0^{(n)} - [f_0^{(n)}]_i^{(m)} \\ f_0^{(n)} + f_i^{(m)} - [f_i^{(m)}]_0^{(n)} \end{cases} \tag{5.32}$$

式中 $f_i^{(m)}$ 表示 m 项内展开等等．上式两边取 m 项内展开或 n 项外展开，可以证明上述法则．利用渐近匹配原理 (5.24) 表明，在内、外区又分别得出内展开和外展开式.

如果用差来进行构造，虽然概念略有不同，但仍得出相同

的法则．外展开式可以加上作为精确解同外展开之差的内问题的解使它成为一致有效；内展开也可用同样的方法来进行修正．这条法则用符号表达如下：

$$f_c^{(m,n)}=\begin{cases}f_0^{(n)}+[f-f_0^{(n)}]_i^{(m)}\\ f_i^{(m)}+[f-f_i^{(m)}]_0^{(n)}\end{cases}\tag{5.33}$$

用渐近匹配原理便可证明它同加法合成法则 (5.32) 是等价的。

第二种方法叫乘法合成．外展开要乘一个修正因子，它等于内展开与其外展开的比值；内展开用同法处理．乘法合成法则为

$$\begin{aligned}f_c^{(m,n)}&=f_0^{(n)}\frac{f_i^{(m)}}{[f_i^{(m)}]_0^{(n)}}=f_i^{(m)}\frac{f_0^{(n)}}{[f_0^{(n)}]_i^{(m)}}\\&=\frac{f_0^{(n)}f_i^{(m)}}{[f_i^{(m)}]_0^{(n)}=[f_0^{(n)}]_i^{(m)}}\end{aligned}\tag{5.34}$$

可以看出，第一种形式是在 4.8 节中应用于圆头翼型得到修正因子的方法．最后一种形式显示了内、外极限过程固有的对称性。

因为两个量的比值接近于 1 时，可以用二项定理展开成和式，这样就把加法与乘法合成法则联系起来了．一般说来，应用加法合成法则简单些，有时则乘法合成法则的结果简单些．即使内问题没有解析解，只能用数值计算或实验方法了解解的性质，这两种合成方法都能使用(参看注 6)．

我们以薄椭圆翼型表面速度为例，来说明上述两种方法．取外展开 (4.13) 两项，取内展开 (4.46) 一项，用加法合成法则 (5.32) 便可得到一阶一致有效的摄动解：

$$\frac{q}{U}\sim\sqrt{\frac{2s}{2s+\varepsilon^2}}+\varepsilon\tag{5.35}$$

用乘法合成法则 (5.34) 可得

$$\frac{q}{U} \sim (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2s}{2s+\varepsilon^2}} \tag{5.36}$$

按照我们所修正的是前缘还是后缘处的非一致性，式中 $s=1+x$ 或 $1-x$；依次处理了前缘和后缘，就可得到真正的一致有效解(习题 5.3)。重复应用合成法则同样可以处理其它类型的多重非一致性(参看 9.13 节)。

合成展开至少与构成它的内外展开式有相同的精确度。所以，式(5.35)，(5.36)的误差，在远离前后缘处不超过 $O(\varepsilon^2)$ 数量级，在前后缘附近不超过 $O(\varepsilon)$ 数量级。事实上，加法合成(5.35)的结果在驻点附近的误差显然恰好是 ε。乘法合成(5.36)的优点是，它在驻点处是精确的。如果用两项外展开、两项内展开来延伸合成展开，那么不论是用加法合成还是用乘法合成都导出了式(5.36)。这就是说，由于巧合，实际上(5.36)的误差处处都不超过 $O(\varepsilon^2)$ 数量级。图 5.7 图示了运用合成展开后所得到的改进。

习　　题

5.1　Friedrichs 模型的一致有效近似. 试从解(5.6)用两种不同的方法构成合成展开. 讨论它们的差别，并同精确解作比较. 考虑高阶近似的情况.

5.2　双凸翼型的一致有效近似. 试构造不可压缩流中双凸薄翼表面速度的近似表达式，该式除在尾缘处外，在一阶精确度范围内是一致有效的。

5.3　两个非一致性区的合成法则. 试提出类似于(5.32)和(5.34)的法则，以使在有两个不同的非一致性区时，构造合成展开式(对于薄翼，该两个非一致性区为驻前缘、驻后缘). 应用上述的结果计算椭圆翼型的表面速度，并同精确解作比较.

5.4　外展开、中展开、内展开. 试证：下述问题

$$x^3\frac{dy}{dx}=\varepsilon[(1+\varepsilon)x+2\varepsilon^2]y^2,\quad y(1)=1-\varepsilon$$

在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 内的摄动解要有三个匹配展开式．相继计算直接(外)展开式的两项，中展开的两项以及内展开的一项．根据前一个展开式选择新的放大了的变量，在每一步要进行匹配．

5.5 最高阶导数不等于零的模型． 对于方程

$$(1+\varepsilon)x^2\frac{dy}{dx}=\varepsilon[(1-\varepsilon)xy^2-(1+\varepsilon)x+y^3+2\varepsilon y^2],$$

$$y(1)=1$$

试计算幂级数形式的近似解三项．推断在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 区间内非一致性区的位置和大小。计算内展开的主项，并由匹配确定常数．再计算第二项，并构造一致有效的二阶近似解．

5.6 弹簧上轻质点的脉冲运动． 一个轻的质点悬挂在重量忽略不计的弹簧上，其内阻尼与速度成正比．用锤子一击给该质点以一个垂直冲量 I．试证，适当地选择变量，可将问题化为

$$\varepsilon\ddot{y}+\dot{y}+y=0,\ y(0)=0,\ \varepsilon\dot{y}(0)=1$$

并说明小 ε 时的直接展开法是如何失效的？ 计算内展开与合成近似．当阻尼不存在时，标准方程为 $\varepsilon\ddot{y}+y=0$，试讨论在这种情况下，上述方法的适用性．

5.7 抛物形剪切流中的圆柱． 引进远离圆柱处有效的补充展开式来完成习题 2.4 的求解过程，算到 ε 阶．构造一致有效的合成近似解(参看注 3)．

第六章 变形坐标法

6.1 历史介绍

四十年代末，Whitham 和 Lighthill 在 Manchester 大学从事研究确定超声速流中弓形激波位置的问题．作为上述工作的成果，Lighthill (1949a) 阐明了消除非线性问题摄动解的非一致有效性的一般方法．随后，这个方法被应用于流体力学中的各种问题．因此，它是不同于匹配渐近展开法的另一种重要方法．

Lighthill 方法的基本思想是：线性化问题解可能具有正确的形式，但是不完全在它原来的位置上．弥补的方法是，在渐近级数中，不仅将因变量也将坐标*之一进行展开，以便将坐标稍稍加以变形．一阶近似是变形后变量的函数，该函数的形式同它未变形以前的一样．这样一来，一阶近似就成为一致有效的了．我们可用同样的方法求高阶近似．坐标变形在一开始时是未知的，必须在求解过程中逐项确定．

可以用 4.12 节中引进的原理确定变形，即

$$\text{“高阶近似的奇性不比一阶近似的奇性强”.} \tag{6.1}$$

这就不会发生使直接摄动展开在非一致有效区内失效的有害的奇异性．Lighthill 指出：有时奇性的微弱增加实际上是允许的(习题 6.1)．然而，采用上述原理最简单．

这个原理不能唯一地确定变形，但这种非唯一性往往是有利的．因为因变量和自变量都被展开了，求得的解是隐函

---

* 即自变量．——译者

数形式，变形坐标作为一个参数出现．这种极不希望有的隐函数形式在多数问题中是不可避免的．我们往往只要求一致有效的一阶近似，这时考察二阶方程仅用来确定变形，但不必求解．

Poincaré (1892) 用自变量类似的变形来求非线性常微分方程的周期解．因此，钱学森 (Tsien, 1956) 在一篇综述文章中称它为"PLK 方法"．其中 K 代表郭永怀 (Kuo, 1953, 1956)，他把上述方法应用于粘性流动．我们还是把它叫做 Lighthill 方法，或把它叫做反映其主要特性的变形坐标法．

这个方法用于处理双曲型微分方程，尤其是用于朝一个方向传播的波动问题时是非常成功的．这类问题同为提出这种方法所研究的问题是属于同一种类型的．Lighthill (1949b) 本人接着就把该方法应用于研究定常超声速流的锥形激波．Whitham 把它应用于以定常超声速飞行的轴对称弹体激波形状 (1952) 和星系中球面激波传播问题 (1953) 的研究．Rao (1956)，Legras (1951, 1953) 分别处理了声爆和超声速翼型问题．

对于两个变量的双曲型方程，林家翘 (Lin, 1954) 将上述方法作了重要推广．这时，Lighthill 的变形坐标可以理解为特征之一．林家翘采用特征参数为摄动理论的基础，这就相当于变形两族特征线．这样就可以处理朝两个方向传播的波动问题了．

由于 Lighthill 方法的灵活性，它代表了一种方法的哲理，而不是一套确定的法则．因而很难说这种方法什么时候会失效．尽管 Lighthill 处理了 4.12 节阐述的不可压缩圆头翼型问题 (Lighthill 1951)，但该方法好象不适用于椭圆型方程．同样，尽管郭永怀作过种种努力，该方法似乎也不适用于抛物型方程．对于这类方程，它甚至还会导致错误的结果

(Wu, 1956, Levy, 1959). 所以，Lighthill (1961) 以后在一篇同原始文章有相同题目的综述文章中提出，他的方法只能用于研究双曲型偏微分方程.（参看注 7)

把坐标变形法同匹配渐近展开法作一比较可以说明一些问题. 前者对因变量只用一个渐近展开式,这既是一个缺点,也是一个优点. 由于这个缘故,分析比较简单,也不会遇到内展开第一项不能求解的非线性问题. 另一方面，同由内展开所提供的关于非一致有效区的详细描述相比，确定坐标变形所用的原理是非常粗糙的,所以 Lighthill 方法不能取得普遍成功是不足为奇的.

6.2 一个典型的常微分方程

因为我们致力于流体力学的研究，所以着重讨论变形坐标法在偏微分方程中的应用. 不过这个方法对于很多常微分方程也有用. 事实上，Lighthill 是通过考虑方程

$$(x+\varepsilon f)\frac{df}{dx}+q(x)f=r(x) \tag{6.2}$$

来引进这个方法的. Wasow (1955) 在对 q，r 不太严格的限制下证明了收敛性 (Lighthill (1961) 又作了改进). 我们选择两个简单函数后,考虑如下模型:

$$(x+\varepsilon f)\frac{df}{dx}+f=1,\quad f(1)=2 \tag{6.3}$$

以参数 ε 的幂进行直接摄动展开,得到下述形式解:

$$f\sim\frac{1+x}{x}-\varepsilon\frac{(1-x)(1+3x)}{2x^3}+\varepsilon^2\frac{(1+x)(1-x)(1+3x)}{2x^5}+\cdots \tag{6.4}$$

该级数收敛. 但当 x 趋于零时，收敛半径趋于零，展开式在

$x=0$ 附近是非一致有效的．这是发生在奇异摄动问题中大家所熟悉的情况．其精确解为

$$f=\sqrt{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2+2\frac{1+x}{\varepsilon}+4}-\frac{x}{\varepsilon} \tag{6.5}$$

它在 $x=0$ 处是有限的．完整的方程沿着直线 $x=-\varepsilon f$（图 6.1）有奇性。但线性化将奇性挪到 $x=0$ 处． 在高阶近似中，奇性不但没有被矫正，反而偏离实际情况被增强了．

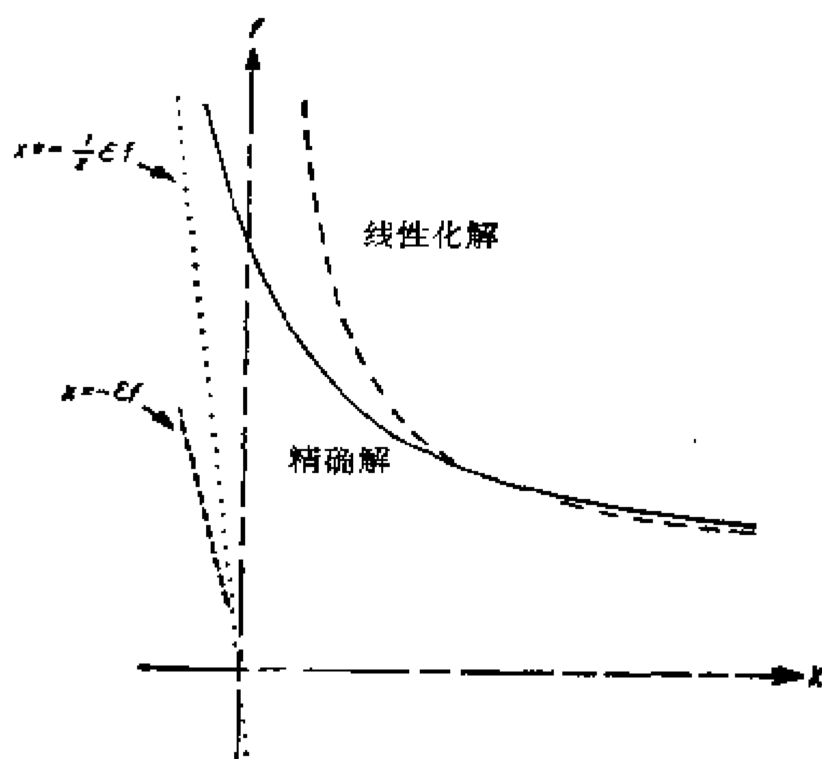


图 6.1　方程 (6.3) 的积分曲线．

变形坐标法通过变形 x 坐标，可把线性化解的奇性移到真实位置上去．我们把 x 和 f 都展开成 ε 的幂级数，其系数是新辅助坐标 s 的函数． 因为变形很小，x 展开式的主项可以取 s 本身．因此，我们令

$$f(x;\varepsilon)\sim f_1(s)+\varepsilon f_2(s)+\varepsilon^2 f_3(s)+\cdots \tag{6.6a}$$

式中

$$x \sim s + \varepsilon x_2(s) + \varepsilon^2 x_3(s) + \cdots \tag{6.6b}$$

代入方程 (6.3)，并使 ε 的同次幂项相等得

$$(sf_1)' = 1 \tag{6.7a}$$

$$(sf_2)' = f_1'(sx_2' - x_2 - f_1) = \left[x_2(1 - f_1) - \frac{1}{2} f_1^2\right]' \tag{6.7b}$$

等等. f_1 满足边界条件的解为

$$f_1(s) = \frac{1 + s}{s} \tag{6.8}$$

这时，f_2 的方程变成

$$(sf_2)' = -\left[\frac{1 + 2s}{2s^2} + \frac{x_2(s)}{s}\right]' \tag{6.9}$$

其解为

$$f_2(s) = \frac{c}{s} - \frac{1}{s^2}\left[x_2(s) + \frac{1 + 2s}{2s}\right] \tag{6.10}$$

如果我们只要求一致有效的一阶近似，上述解 (6.10) 是不需要的。直接观察 f_2 的方程，不必求解便可确定变形 x_2.

必须根据 (6.1) 的原理来选择变形，即要求 f_2 的奇性不比 f_1 强。很明显，最简单的办法是让 f_2 方程 (6.9) 右边的非齐次项为零，即令

$$\frac{1 + 2s}{2s^2} + \frac{x_2(s)}{s} = \text{常数} \tag{6.11}$$

(该常数虽然也可用 s 的任意正则函数来代替).

如何进一步选择变形是悬而未决的，这是本方法的特点。最明显的选择 $x_2 = -(1 + 2s)/2s$ 可导出一致有效的一阶近似为

$$f(x; \varepsilon) \sim \frac{1 + s}{s} + \cdots \tag{6.12a}$$

$$x \sim s - \varepsilon \frac{1+2s}{2s} + \cdots \tag{6.12b}$$

对于这个简单的问题，参数 s 刚好可以消去，并得出一阶近似的显式为

$$f(x;\varepsilon) \sim \sqrt{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 + 2\frac{1+x}{\varepsilon} + 1} - \frac{x}{\varepsilon} \tag{6.12c}$$

另一种办法是令规定边界条件的 $x=1$ 处变形为零，这样做可能是方便的．因此，我们选择 $x_1 = (3s^2 - 1 - 2s)/2s$，一致有效的一阶近似为

$$f(x;\varepsilon) \sim \frac{1+s}{s} \tag{6.13a}$$

$$x \sim s + \varepsilon \frac{3s^2 - 1 - 2s}{2s} \tag{6.13b}$$

在上述情况下，消去 s 表明一阶近似就是精确解 (6.5)，所以级数 (6.13) 终止了．

在 $x=0$ 处，形式的展开式 (6.4) 发散，而精确解式(6.5)或式 (6.13) 的结果为 $f(0;\varepsilon) = (2/\varepsilon + 4)^{\frac{1}{2}}$．选择第一种变形所得的结果 (6.12) 为 $f(0;\varepsilon) \sim (2/\varepsilon + 1)^{\frac{1}{2}}$，在 ε 的一阶准确度内，它同精确解是一致的．

6.3 同匹配展开法比较

自然会提出这样的问题：变形坐标法和匹配渐近展开法的相对适用性和优点是什么？因而，我们要求出上述例子的内展开，它是在非一致有效区中外展开 (6.4) 的补充．

当 x^2 小到 ε 量阶时，外展开不成立．因为这时相继两项的大小并非像原来所假设的那样是逐渐减小的．这就表明非一致有效区在 $x = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ 处．外展开式说明 f 是 $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ 量阶的．因此，我们引进内变量 X 和 F，令

$$X = \frac{x}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad F = f\varepsilon^{\frac{1}{2}} \tag{6.14}$$

它们在非一致性区内是一的数量级。 若写成内变量来表达，方程(6.3)就成为

$$(X + F)\frac{dF}{dX} + F = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tag{6.15}$$

由 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ 那一项可以知道，这是内展开和外展开的渐近序列完全不同的例子。 外展开式(6.4)是 ε 的整数次幂级数，而内展开是 ε 的半整数次幂级数，其形式如下：

$$f(x;\varepsilon) \sim \varepsilon^{-\frac{1}{2}}[F_1(X) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}F_2(X) + \varepsilon F_3(X) + \cdots] \tag{6.16}$$

代入微分方程(6.15)，得

$$(X + F_1)F_1' + F_1 = 0 \tag{6.17a}$$

$$(X + F_1)F_2' + (1 + F_1')F_2 = 1 \tag{6.17b}$$

依此类推. F_1 的通解为

$$F_1(X) = \sqrt{X^2 + 2C_1} - X \tag{6.18}$$

显然，边界条件是外区的条件，它应不予考虑，并用同外展开相匹配的条件来代替. 我们在 $m = n = 1$ 时应用渐近匹配原理(5.24)，按第四章的格式，可得

一项外展开： $f \sim \frac{1+x}{x}$ (6.19a)

用内变量表示： $= 1 + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}X}$ (6.19b)

对小 ε 展开： $= \frac{1}{\varepsilon^{1/2}X} + 1$ (6.19c)

一项内展开： $= \frac{1}{\varepsilon^{1/2}X} = 1/x$ (6.19d)

一项内展开： $f \sim \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}[\sqrt{X^2 + 2C_1} - X]$ (6.20a)

用外变量表示： $= \frac{x}{\varepsilon}\left[\sqrt{1+2C_1\frac{x}{\varepsilon}}-1\right]$ (6.20b)

对小 ε 展开： $= \frac{C_1}{x} + \cdots$ (6.20c)

一项外展开： $= \frac{C_1}{x}$ (6.20d)

令 (6.19d) 同 (6.20d) 相等，我们得到 $C_1 = 1$，因此，用匹配渐近展开法得到的一阶解是

$$f(x;\varepsilon) \sim \begin{cases} \dfrac{1+x}{x} \quad (\text{当}\varepsilon\to 0,\ x\ \text{固定}) & (6.21a) \\ \sqrt{\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)^2+\dfrac{2}{\varepsilon}}-\dfrac{x}{\varepsilon} \quad \left(\text{当}\ \varepsilon\to 0, \dfrac{x}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\ \text{固定}\right) & (6.21b) \end{cases}$$

可以用 (5.10) 节所述的任一种方法构成一致有效的合成近似解：

$$f(x;\varepsilon) \sim \begin{cases} \sqrt{\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)^2+\dfrac{2}{\varepsilon}}-\dfrac{x}{\varepsilon}+1, \quad \text{加法合成} & (6.21c) \\ (1+x)\left[\sqrt{\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)^2+\dfrac{2}{\varepsilon}}-\dfrac{x}{\varepsilon}\right], \quad \text{乘法合成} & (6.21d) \end{cases}$$

可以继续上述过程得到内展开的以下各项.

在本例中，两者相比，看来变形坐标法要简单得多. 在 6.8 节中，我们要进行更细致的比较.

6.4 超声速薄翼理论的非一致性

绕薄翼的超声速流动，是证明坐标变形法十分有效的简单流动问题. Ackeret 的经典线性化解是从近似方程

$$\varphi_{yy} - B^2\varphi_{xx} = 0, \qquad B^2 = M^2 - 1 \qquad (6.22)$$

出发的，式中 φ 是扰动速度势. 我们将它归一化，使速度向量

为 $\boldsymbol{q}=U\mathrm{grad}(x+\varphi)$。虽然 Ackeret 解在物面上及其附近是合适的一阶近似，但在远离翼型处，该近似解不成立。Ackeret 解预言，扰动沿着来流与 Mach 传播到无穷远处且不衰减(图 6.2)，但实际上，Mach 线并不是直的和互相平行的，它们会形成激波并逐渐衰减。

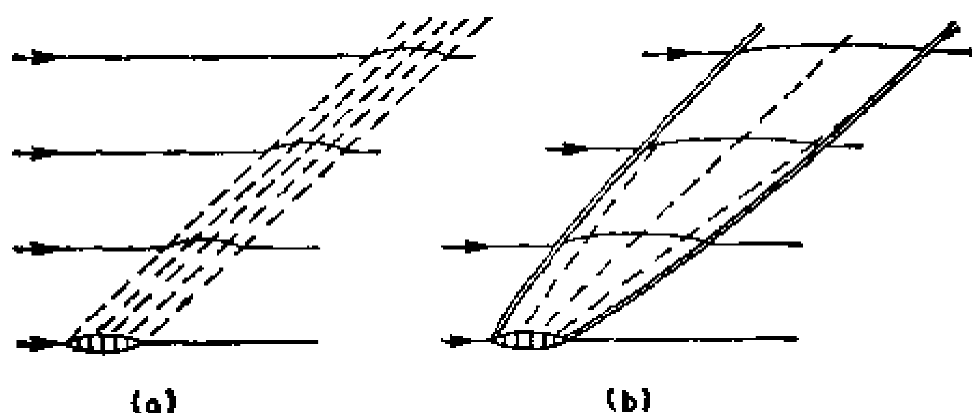


图 6.2 超声速翼型的流谱. (a) 线性的，(b) 非线性的.

在远处的这种非一致性，比如发生在小 Reynolds 数粘性流动的 Stokes 近似中的非一致性(第八章)要更微妙些。对于后者，可以用一阶近似估计运动方程中被略去项的大小，说明它们在最后终于超过了被保留的项。但是，在本问题中，非线性项实际上处处都小于线性项，而只是它们的总贡献起主导作用。它们具有 Hayes (1954) 命名的所谓**累积效应**，也就是说，经过一长段距离后其影响增大到一阶。为了弄清这一点，有必要实际计算二阶近似，即从 Ackeret 线性解出发，用逐步近似法求解非线性势方程 (2.19)。令 (2.19) 中 $\phi=x+\varphi$，并将左边线性项归并起来，使该方程化成下述适当的形式：

$$\varphi_{yy}-B^2\varphi_{xx}=M^2\Big[\frac{\gamma-1}{2}(2\varphi_x+\varphi_x^2+\varphi_y^2)(\varphi_{xx}+\varphi_{yy})+(2\varphi_x+\varphi_x^2)\varphi_{xx}+2(1+\varphi_x)\varphi_y\varphi_{xy}+\varphi_y^2\varphi_{yy}\Big]\qquad(6.23)$$

象前面一样，令翼型上表面用 $y = \varepsilon T(x)$ 来描述(图 4.1)。那么，用迭代 (6.23) 的方法求出翼型上部沿主流方向速度分量的形式的二阶近似为 (Van Dyke, 1952)

$$\frac{u}{U} = 1 - \varepsilon\frac{T'(\xi)}{B} + \varepsilon^2\left[\frac{1}{B^2}\left(1 - \frac{\gamma+1}{4}\frac{M^4}{B^2}\right)T'^2(\xi) - \frac{\gamma+1}{2}\frac{M^4}{B^3}yT'(\xi)T''(\xi) - T(\xi)T''(\xi)\right] + O(\varepsilon^3) \tag{6.24}$$

式中 $\xi \equiv x - By$. 在物面上，上式又可得出众所周知的 Busemann 二阶解. 但是，在远离翼型处，二阶项不比一阶项小——这是迭代过程中所假定的——因为它沿着任一来流 Mach 线 $x - By =$ 常数，二阶项随 y 线性增长. 展开式显然在 $y = O(\varepsilon^{-1})$ 的远场失效.

含有 y 的项正比于 $(\gamma + 1)$，这一项有些麻烦. 它标志着上述的非一致性仅来自于"伪跨声速"项 $(\gamma+1)M^4\varphi_x\varphi_{xx}$，这是微分方程(6.23)右边非线性项所固有的. 如果变换到以后要引进的斜坐标系中去，这一项就更明显些 (参看 Hayes, 1954). 所有其它非线性项的贡献都是一致有效的二阶项.虽然伪跨声速项很小，但它具有一阶累积效应，因此，在求一致有效的一阶近似解时，除了线性项外，必须把这一项保留下来. 如 3.8 节和 4.2 节所述，准确到这一阶的相切条件可以规定在对称轴上，这样一来，一阶近似问题归结为

$$\varphi_{yy} - B^2\varphi_{xx} = (\gamma+1)M^4\varphi_x\varphi_{xx} \tag{6.25a}$$

$$\varphi_y(x, 0) = \varepsilon T'(x) \tag{6.25b}$$

$$\varphi(x,y) = 0 \quad (\text{在上游处}) \tag{6.25c}$$

事先作坐标变换较为方便. 问题中有两个不同的方向；来流方向和翼型上下来流的外行 Mach 线方向(图 6.3). 翼型接近于第一个方向，波谱接近于第二个方向. 另一族 Mach

线只起次要作用。如果我们只考虑单翼上表面，这种说法是正确的；对于多体问题，两族 Mach 线都非常重要，它们彼此相交，形成苏格兰方格呢式图案。由于这个缘故，二阶解 (6.24) 可以用如下规范化的距离更自然地表达出来：

$$\xi = x - By \tag{6.26a}$$

$$\eta = By \tag{6.26b}$$

它们分别与两个不同的方向相垂直。因此，下面我们按 Hayes (1954) 的方法，采用这种"半特征"坐标系。如果存在两族波，我们就使用特征坐标系 $x - By$ 和 $x + By$。下节，我们必须用上面提到的 Lin (1954) 推广的方法来代替 Lighthill 方法。

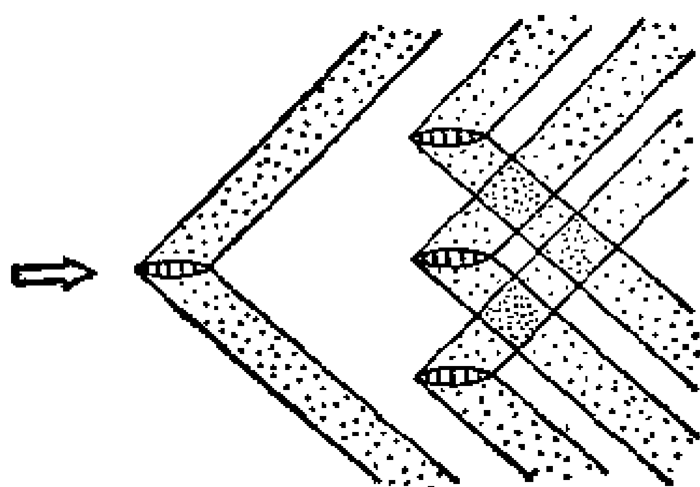


图 6.3 超声速流中的波谱.

用上述斜坐标来表达，问题 (6.25) 成为

$$\varphi_{\xi\eta} + \frac{\gamma+1}{2}\frac{M^4}{B^2}\varphi_\xi\varphi_{\xi\xi} = \frac{1}{2}\varphi_{\eta\eta} \tag{6.27a}$$

$$\varphi_\xi = -\varepsilon\frac{T'(\xi)}{B} + \varphi_\eta, \quad 在\ \eta = 0 \tag{6.27b}$$

$$\varphi = 0, \qquad 上游 \tag{6.27c}$$

线性化解为 $\varphi = -\varepsilon T(\xi)/B$，故 $\varphi_\eta = \varphi_{\eta\eta} = 0$. 虽然这不

是正确的非线性解，因为波要略微偏离来流 Mach 线，但 Hayes 指出，这里出现的项 φ_η，$\varphi_{\eta\eta}$ 象已被略去的其它项一样，真正代表了二阶效应．因此，它们可以被略去，欲求一致有效一阶近似的问题就简化成

$$\varphi_{\xi\eta}+\frac{\gamma+1}{2}\frac{M^4}{B^2}\varphi_\xi\varphi_{\xi\xi}=0 \tag{6.28a}$$

$$\varphi_\xi(\xi,0)=-\varepsilon\frac{T'(\xi)}{B} \tag{6.28b}$$

$$\varphi=0 \qquad (\text{上游}) \tag{6.28c}$$

现在我们幸好能得到了一个关于无量纲流向扰动速度 u' 的适定问题，u' 表达式为

$$u'=\frac{\Delta u}{U}=\varphi_x=\varphi_\xi \tag{6.29}$$

我们宁可用扰动速度来进行研究，因为它比速度势 φ 具有更明确的物理意义．下面，我们略去 u' 的上标“$'$”后，最终要解的问题成为

$$u_\eta+\frac{\gamma+1}{2}\frac{M^4}{B^2}uu_\xi=0 \tag{6.30a}$$

$$u(\xi,0)=-\varepsilon\frac{T'(\xi)}{B} \tag{6.30b}$$

$$u=0 \qquad (\text{上游}) \tag{6.30c}$$

6.5 用变形坐标法求一阶近似

我们把变形坐标法应用于上述问题．描述 Mach 线的坐标 ξ 就是要变形的坐标，这一点在数学上和物理上都是显而易见的．因此，我们引进稍微变形了的变量 s 来代替 ξ，令

$$u(\xi,\eta;\varepsilon)\sim\varepsilon u_1(s,t)+\varepsilon^2u_2(s,t)+\cdots \tag{6.31a}$$

$$\xi\sim s+\varepsilon\xi_2(s,t)+\cdots,\ \eta=t \tag{6.31b}$$

导数的变换由下式得到:

$$\frac{\partial}{\partial s} = (1 + \varepsilon\xi_{2s} + \cdots)\frac{\partial}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = (\varepsilon\xi_{2t} + \cdots)\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \tag{6.32a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = (1 - \varepsilon\xi_{2s} + \cdots)\frac{\partial}{\partial s},$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial t} - (\varepsilon\xi_{2t} + \cdots)\frac{\partial}{\partial s} \tag{6.32b}$$

把展开式(6.31)代入问题(6.30),并令 ε 的同次幂项相等,得到

$$u_{1t} = 0, \quad u_1(s, 0) = -\frac{T'(s)}{B}, \quad u_1 = 0 \text{ (上游)} \tag{6.33a}$$

$$u_{2t} = \left(\xi_{2t} - \frac{\gamma + 1}{2}\frac{M^4}{B^3}u_1\right)u_{1s} \tag{6.33b}$$

显然,u_1 是变形坐标 s 的函数,它同线性理论中未变形变量 ξ 的函数有相同的形式:

$$u_1(s, t) = -\frac{T'(s)}{B} \tag{6.34}$$

现在按(6.1)的原理选择变形函数 ξ_2,使当 $By = \eta = t$ 为无穷时,u_2 的奇性不比 u_1 强. 要确保这一点最简单的方法还是使 u_2 的方程(6.33b)的右边项等于零,即令

$$\xi_{2t} = \frac{\gamma + 1}{2}\frac{M^4}{B^3}u_1 = -\frac{\gamma + 1}{2}\frac{M^4}{B^3}T'(s) \tag{6.35}$$

所以

$$\xi_2(s, t) = f(s) - \frac{\gamma + 1}{2}\frac{M^4}{B^3}tT'(s) \tag{6.36}$$

现在取任意函数 $f(s) = 0$,从而使在 $y = 0$ 轴上不发生变形

就够了．从连续性条件可见，一阶垂直速度也是 s 的函数，它同线性理论中 ξ 的函数具有相同的形式．回到原先的笛卡儿坐标，两个速度分量的一致有效的一阶近似为

$$u' \equiv \frac{\Delta u}{U} \sim -\varepsilon \frac{T'(s)}{B} + \cdots,$$

$$v' \equiv \frac{v}{U} \sim \varepsilon T'(s) + \cdots \tag{6.37a}$$

式中参数 s 由下式以隐函数形式给出：

$$x - By \sim s - \frac{\gamma+1}{2}\frac{M^4}{B^4}\varepsilon y T'(s) + \cdots \tag{6.37b}$$

这个解具有简单的物理解释：$s=$ 常数线实际上是修正了的 Mach 线，它可用一阶速度来进行计算．因为可以证明：外行特征线族的斜率为 (Van Dyke, 1952)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{B}\left(1 - \frac{\gamma+1}{2}\frac{M^4}{B^2}\frac{\Delta u}{U} + \cdots\right) \tag{6.38}$$

积分上式导出

$$x - By = \frac{\gamma+1}{2}\frac{M^4}{B}\frac{\Delta u}{U} y + \text{常数} \tag{6.39}$$

它相应于式 (6.37b)，常数为 s．

因此，用变形坐标法获得的解导出速度分量，它沿着修正的 Mach 线为常数，并且在翼型上等于由线性理论所确定的值．这一点是同线性理论不同的．根据线性理论，任一点的速度等于通过该点的来流 Mach 线始端的值(图 6.4)．形式的二阶理论 (6.24) 试图把修正的 Mach 线同来流 Mach 线始端的值用 Taylor 展开联系起来以改进估算方法．当 $y \to \infty$ 时，这种方法当然失效．于是，我们可以看到，用变形坐标法得到的一致有效一阶近似解由简单波 (Prandtl-Meyer 膨胀扇形区)构成，并可同 Friedrichs (1948) 在此基础上获得的解进行比较．

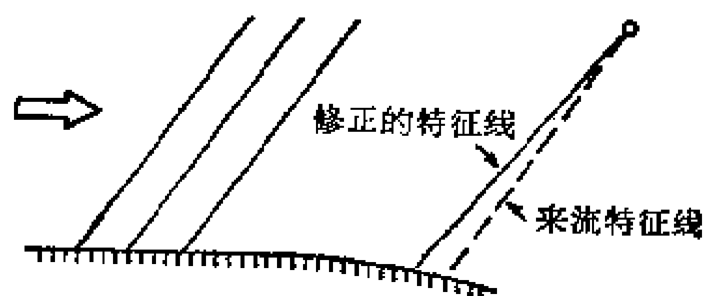


图 6.4　Mach 线的修正.

Whitham (1952) 已把上述物理解释作为更直观地导出一致有效一阶近似解的基础. 他提出了一个基本假设:"如果流场中近似特征线为准确的特征线所代替，至少为它足够精确的近似所代替，线性理论给出处处一致有效的一阶近似流动."式(6.39)实际上给出了特征线足够良好的近似. 于是，Whitham 假设立即导出解(6.37)，它已为我们用变形坐标法更加正规地导出. Whitham 更加关心把这个方法应用于旋成体,其结果是计算声爆的基础.

变形的隐函数性质对于解的一致有效性显然是必需的. 但在非常简单的情况下，可以逆转自变量间的依赖关系从而得到显式解. 譬如,考虑图 6.5 所示的光滑凸壁,

$$T(x) = -\frac{1}{2}x^2, \quad x > 0.$$

方程 (6.37b) 为

$$x - By = s\left(1 + \varepsilon\frac{\gamma+1}{2}\frac{M^4}{B^2}y\right) \qquad (6.40a)$$

上述关系可以求逆，得出

$$s = \frac{x - By}{1 + \varepsilon\dfrac{\gamma+1}{2}\dfrac{M^4}{B^2}y} \qquad (6.40b)$$

于是，(6.37a) 便可确定任一点的速度分量为

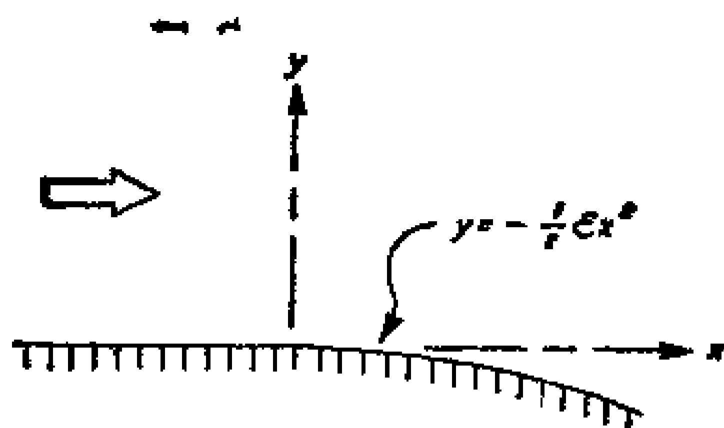


图 6.5　简单的光滑凸壁.

$$B\frac{\Delta u}{U}=-\frac{v}{U}=\varepsilon s$$

$$=\varepsilon\frac{x-By}{1+\varepsilon\frac{\gamma+1}{2}\frac{M^4}{B^2}y} \tag{6.41}$$

在本例中，我们可以清楚地看到在形式的薄翼展开式中产生非一致性的原因. 对于任意给定的 y，解可以展开成 ε 的幂级数，但其结果在 $y=\infty$ 处不是一致有效的.

6.6　转角和激波处的修正

可能发生这样的情况，消除了某摄动问题明显的非一致性后，另一些困难就突出了，必须依次加以解决才能获得真正的一致有效解. 如果本例中翼型上有转角或激波就是这种情况. 虽然这些细节对我们的主题不是必不可少的，但为了完整起见，我们撇开主题来简要地说明尚需进行的修正.

上述结果对于斜率是连续和缓慢变化（T'' 为一的数量级）的凸壁是一致有效的. 但是，在转角下游 ε 量阶距离的表面上（除了转角在 $y=0$ 轴上的情况外）结果不成立，这一点在物理上是很清楚的（图 6.6）. 因为解中所选用的是转角前的斜率而不是转角后的斜率. 对于曲率大到在翼型厚度量级

距离上，斜率变化占总变化的很大比例（T'' 为 ε^{-1} 数量级）的任何区域内，上述论断也是正确的.

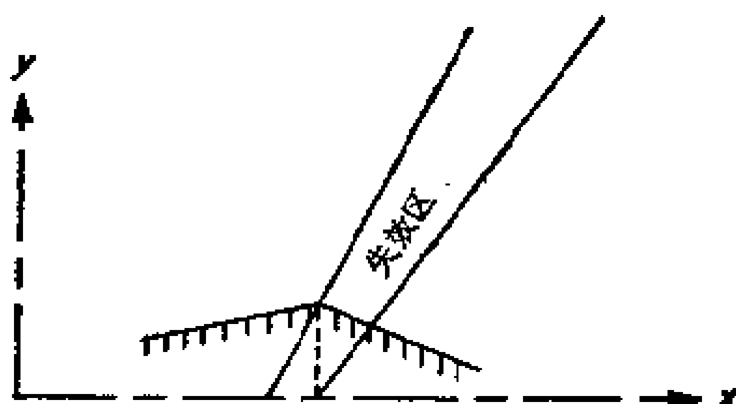


图 6.6 转角后的失效区.

产生上述困难的原因是：使相切条件在对称轴上而不是准确地在物体表面上得到满足，并且还相应地使坐标变形在轴上等于零. 这个问题可以直接选择式(6.36)中的积分函数 $f(s)$ 来加以解决，所选的 $f(s)$ 要使得在物体表面上的变形恰好为零，因此在翼型上，$s=x$. 由此导出

$$f(s)=\frac{\gamma+1}{2}\frac{M^4}{B^2}\varepsilon T(s)T'(s)-BT(s) \qquad (6.42)$$

于是，在即使是曲率迅速变化或有转角的表面上也是一致有效的解为(6.37a)，并用

$$x-By=s-\varepsilon BT(s)$$

$$-\frac{\gamma+1}{2}\frac{M^4}{B^2}[y-\varepsilon T(s)]\varepsilon T'(s) \qquad (6.43)$$

代替(6.37b). 上述结果虽然比 Whitham (1952) 的方程(92)和(93)简单些，但它们是等价的.

虽然对于凹壁还得嵌入激波，但现在这个解对于任何光滑凸壁是一致有效的. 不管曲率变化多快，上述结果都是正确的. 但对于曲率有间断的极限情况(图 6.7)，把特征线描

给出来，可见在从转角出发的 Prandtl-Meyer 扇形区内，解是不确定的。譬如说，取 $T(x)=-xH(x)$，其中 $H(x)$ 是 Heaviside 单位阶梯函数，它给出了图 6.7 所示的凸角。将它代入 (6.37b) 或 (6.43)，求解 s 到 ε 的一阶，得到

$$s=\begin{cases} x-By & (x-By<0) \\ x-By-\dfrac{\gamma+1}{2}\dfrac{M^4}{B^2}\varepsilon y & \left(x-By>\dfrac{\gamma+1}{2}\dfrac{M^4}{B^2}\varepsilon y\right) \end{cases} \tag{6.44}$$

然而 s 在 $0<x-By<[(\gamma+1)/2](M^4/B^2)\varepsilon y$ 区域内是不定的，该区域恰好就是 Prandtl-Meyer 扇形区。

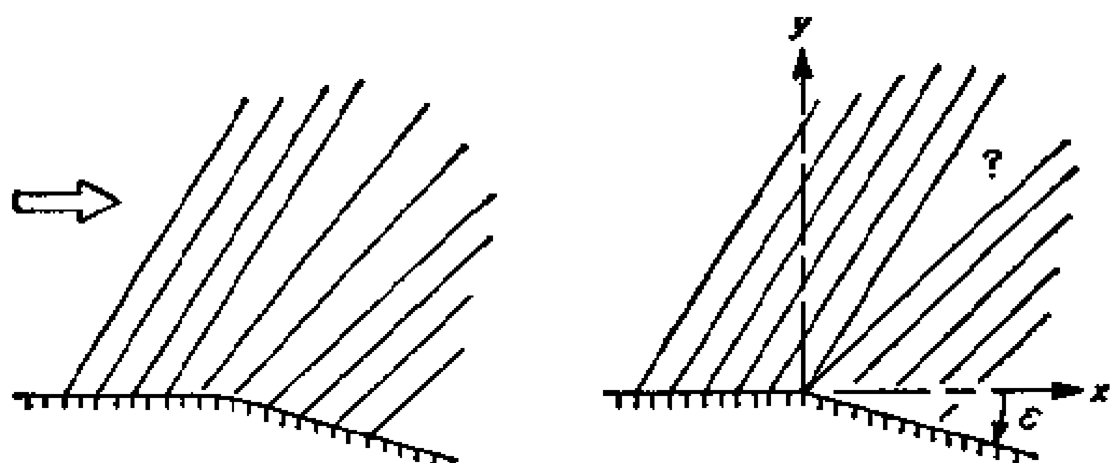


图 6.7 转角-光滑壁面的极限.

上述困难可以用暂且把转角稍稍光滑化的方法很容易地加以克服。这样一来，如图 6.8 所示，通过每点的修正特征线又同表面上具有确定斜率的点相交了。如果转角在 (x_c, y_c) 处，s 显然在扇形区内处处近似于 x_c。因此，$T(s)$ 在扇形区内取常数值 $T(x_c)$，而 T' 从 $T'(x_c-)$ 变化到 $T'(x_c+)$。在扇形区内任一点 (x, y)，T' 值可从 (6.43) 式求出：

$$x-By=x_c-By_c-\frac{\gamma+1}{2}\frac{M^4}{B^2}\varepsilon(y-y_c)T' \tag{6.45}$$

因此

$$T' = -\frac{(x - By) - (x_c - By_c)}{\frac{\gamma + 1}{2}\frac{M^4}{B^2}\varepsilon(y - y_c)} \tag{6.46}$$

然后代入 (6.37a)，导出扇形区的速度分量为

$$B\frac{\Delta u}{U} = -\frac{v}{U} = \varepsilon\frac{(x - By) - (x_c - By_c)}{\frac{\gamma + 1}{2}\frac{M^4}{B^2}\varepsilon(y - y_c)} \tag{6.47}$$

上式仅在扇形区内成立。在该区域内，式(6.46)的值介于 $T'(x_c-)$ 和 $T'(x_c+)$ 之间。

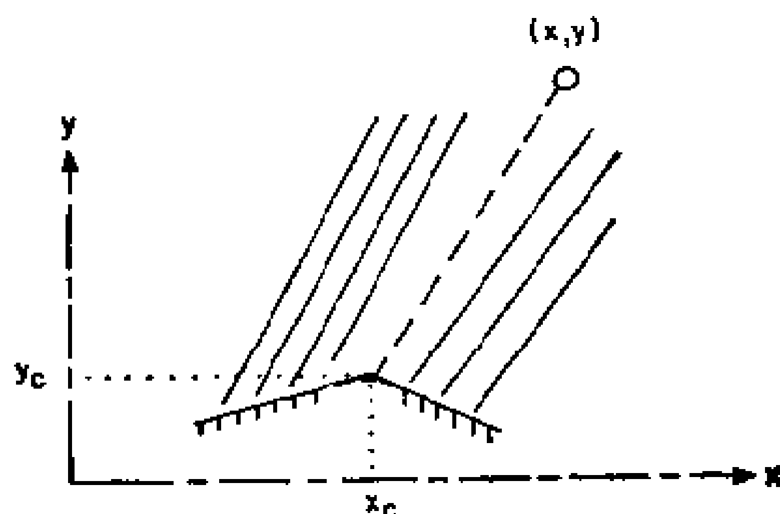


图 6.8 凸角的光滑化.

最后，对于凹壁，修正的特征线汇聚起来，并在充分远的距离处(凹角立即发生)，它们互相重迭，所以解不是唯一的。譬如说，改变图 6.7 中偏转角的符号就会使扇形区中每一点有两个 s 值。这时必须引进激波，使 Mach 线在重迭以前就为激波所截断(图 6.9)，以消除这种多值性。在一阶精度范围内，激波是前后 Mach 线的分角线，我们是按此众所周知的原则来嵌入激波的。Whitham (1952) 根据这一原则精心绘制了轴对称流激波波谱的结构图，它也适用于二维流动。

对于简单的物形，可以推断所产生的激波的形状。例如：

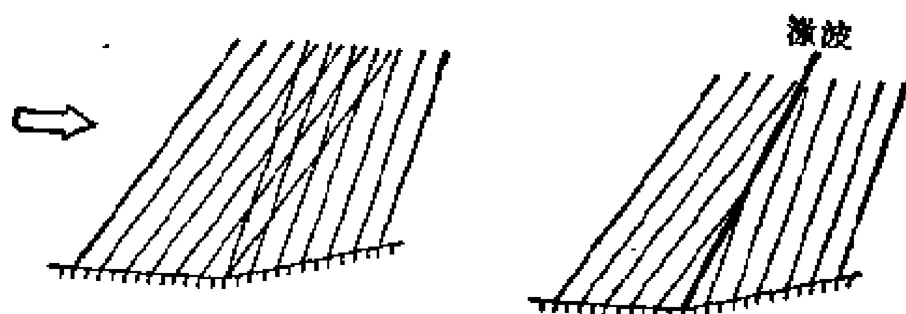


图 6.9 处理重迭的特征线.

由于抛物镜的聚焦性质(图 6.10)双楔翼型的前激波和后激波在直线段外,必是以转角为焦点,来流 Mach 线为轴的抛物线的一部分. 更一般地说,在能把翼型看成是一个点的远处,上述结论对任何翼型都是正确的. 因此,激波形状的宽度以 $y^{\frac{1}{4}}$ 的规律渐近地增大.

6.7 用匹配展开法求一阶近似

另外再用匹配渐近展开法来求解式 (6.30) 是有意义的. 代入假定的级数

$$u(\xi, \eta; \varepsilon) \sim \varepsilon u_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 u_2(\xi, \eta) + \cdots \quad (6.48)$$

便可毫无困难地得出直接展开式

$$u \sim -\varepsilon \frac{T'(\xi)}{B} - \varepsilon^2 \frac{\gamma+1}{2} \frac{M^4}{B^4} \eta T'(\xi) T''(\xi) + \cdots \quad (6.49)$$

这是完整的二阶解 (6.24) 的近似形式. 根据我们在 5.9 节所述的习惯,即使其非一致性区是无穷远点的邻域,我们仍称它为外展开.

当 $\eta = O(\varepsilon^{-1})$ 时,外展开失效,在该区域中,u 是 ε 量阶的. 这就告诉我们要引进内变量,使内展开为

$$u(\xi, \eta; \varepsilon) \sim \varepsilon U_1(\xi, H) + \varepsilon^2 U_2(\xi, H) + \cdots,$$
$$H = \varepsilon\eta \quad (6.50)$$

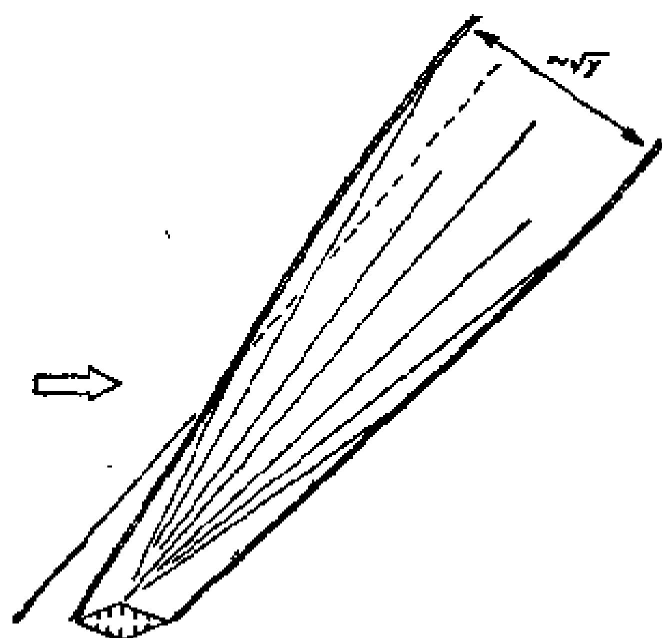


图 6.10 双楔翼型的激波波谱.

代入微分方程(6.30a)导出一阶近似

$$\frac{\partial U_1}{\partial H}+\frac{\gamma+1}{2}\frac{M^4}{B^2}U_1\frac{\partial U_1}{\partial \xi}=0 \qquad (6.51)$$

这是一个非线性偏微分方程. 但用交换自变量和因变量的方法,并求 $\xi(U_1, H)$ 形式的解,刚好可以使它线性化. 上述方程化为

$$\frac{\partial \xi}{\partial H}=\frac{\gamma+1}{2}\frac{M^4}{B^2}U_1 \qquad (6.52)$$

其通解为

$$\xi(U_1, H)=g(U_1)+\frac{\gamma+1}{2}\frac{M^4}{B^2}U_1H \qquad (6.53a)$$

同外解(6.49)匹配可以确定积分函数 g. 尽管内解是隐式的,由上式显然可以得出

$$g(U_1)=T'^{-1}(-BU_1) \qquad (6.53b)$$

式中 T'^{-1} 是 T' 的反函数. 譬如,对于图 6.5 所示的情形, $T'(x)=-x$, 所以 $T'^{-1}(-BU_1)=BU_1$, 然后,对(6.53a)求解 U_1, 导出以前用变形坐标法得到的结果(6.41).

上述内解是一致有效的,因为事实上,内方程(6.51)就

是完整的方程(6.30a).在本例中,内展开没有引进任何简化,因此,它取一项就终止了.

6.8 变形坐标法的适用性

我们用同匹配渐近展开法相比较的方法来着重说明变形坐标法特有的优点. 在上述两个例子中,似乎可以看出,只要变形坐标法适用,那么匹配渐近展开法也适用. 可惜反之不然. 所以,在两者之中,匹配渐近展开法更可靠,或许更基本些(参看注 7).

不过,在变形坐标法适用的场合,往往特别简单. 上述例子已充分说明这一点,它们证明 Lighthill 方法有两个优点:

(i) 它只需求解直接(外)展开的线性摄动方程即可;

(ii) 它直接给出单一的一致有效展开式.

第二点不是最重要的,因为在第五章我们已经看到,内、外展开式可以方便地以某种方法构成单一的一致有效的合成展开式. 另一方面,第一个优点往往是实质性的,因为对于非线性问题,内展开主项的方程可能很难求解,甚至不能求解. 在上面两个例子中,第一个内问题都是非线性的,而变形坐标法仅同线性方程有关. 不必详细研究非一致性区就能达到目的,这是 Lighthill 方法的荣耀.

然而,由于同样的原因,变形坐标法不总是能取得成功的. 更糟的是,表面上看来是成功的,实际上却导出了错误的结果. 因此,关键问题是:究竟在什么情况下应用变形坐标法才是可靠的呢?目前还不能提出一般的法则,只能给出一些迹象.

一个确定的法则是:对于因小参数乘以最高阶导数产生奇性的摄动问题,变形坐标法不适用. 所以,Lighthill 方法不能处理 Prandtl 边界层问题. 正如考虑 5.2 节的数学模型

会看到的那样，这样做通常毫无结果。然而，在某些特定情况下，它会导出确定的，然而是错误的结果。Levey (1959) 已经分析了这一情况，他提出了一个数学模型来说明主要困难所在。

当直接展开的一阶近似所预言的奇性确实是存在的，但只是发生在略微不同的位置上时，变形坐标法会取得成功；而当真正的奇性是不同类型的，或不存在时，这个方法失效。前者似乎发生在双曲型方程中；后者通常发生在椭圆型方程中。不可压缩尖头薄翼理论的对数奇性是椭圆型方程的例子。在 4.11 节中我们看到，实际上它相应于小分数幂的情况，因此，用变形坐标法失败了，而用匹配渐近展开法可以成功。

不可压缩流动中的圆头翼型是例外，因为薄翼理论的平方根奇点是存在的，只是从前缘处近似地移到密切抛物柱的焦点处而已 (4.12 节)。因此，Lighthill (1951) 能够用他的方法求出圆头翼型的一致有效二阶近似解(参看注 7)。但是，试图把他的解推广到高阶近似、推广到亚声速可压缩流或其它头部形状的翼型时都失败了。这个事实表明：这只是一种例外情形。而上述所有这些问题都已用匹配渐近展开法成功地解决了 (Van Dyke, 1954)。

这一情况迫使 Lighthill (1961) 提出：Lighthill 方法只限应用于双曲型偏微分方程。这是对于一种非常有效方法的不幸的限制。我们希望通过进一步的研究，不仅搞清现有的变形坐标法适用的条件，而且也能对上述方法进行改进，使我们能有把握地将它应用于其它问题，尤其是同椭圆型和抛物型偏微分方程有关的问题。

习　　题

6.1　弱变形原理. 试证：112 页上问题 (6.3) 的一致有效渐近解可

以用变形坐标法求得. 如果变形原理(6.1)的条件放宽了，它只要求二阶近似不比一阶近似平方的奇性更强.

6.2 Carrier 问题(1954). 将变形坐标法应用于下述问题(参看注 3):

$$(x^2 + \varepsilon f)\frac{df}{dx} + f = 0,\ f(1) = e$$

试证：取适当的常数 a, b, c, d, g 后，一致有效的一阶近似为

$$f \sim a e^{b/s}, \qquad x \sim s - \varepsilon c(1 + ds + gs^2)e^{b/s},$$

并计算 $f(0)$ 的值.

6.3 推迟的变形. 在应用变形坐标法于问题

$$2x^2\frac{df}{dx} = \varepsilon f^3, \quad f(1) = 1$$

时，试证：一阶变形仅由三阶问题来确定. 将此解同用匹配渐近展开法得到的结果进行比较.

6.4 Pritulo 方法. Pritulo (1962) 指出：如果我们计算了直接摄动解，并发现它是非一致有效的，那么为使这个解成为一致有效所需的坐标变形，可以直接由此解代数方程，而不是解微分方程来求出. 将(6.6b)代入式(6.4)，并确定准确到 ε^2 阶的变形来说明这个方法(参看注 3).

6.5 柱面波的传播. 研究非线性方程的模型:

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0,\ v(x, 1) = \varepsilon f(x)$$

对于小 ε 和 $y \geqslant 1$，确定直接展开的非一致性区域. 试证：由变形坐标法得到了精确解.

第七章　大 Reynolds 数粘性流动

7.1　引言

我们现在来研究奇异摄动问题的典型例子——绕物体的大 Reynolds 数粘性流动. Prandtl 边界层理论就是为了解决这个问题提出来的. 过了一些时间以后人们才意识到，边界层理论给出了大 Reynolds 数渐近展开式的主项. 但是，为了计算展开式的以下几项，起初也是众说纷纭，错误百出. 直到系统地应用了匹配渐近展开法以后，问题就变得简单明白了. 本章，我们要运用这个方法说明，Prandtl 理论是怎样作为第一步安排在逐次近似法中的. Lagerstrom 和 Cole (1955) 估计，当 Reynolds 数减小到 10，甚至于 5 时，二阶近似可以精确地计算摩擦阻力. 这就说明了这一改进的实际用途.

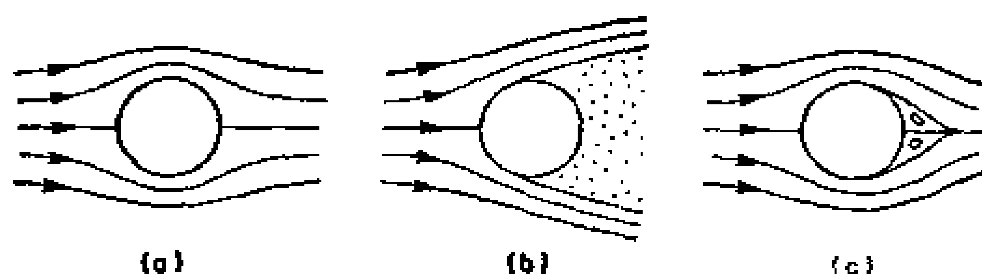


图 7.1　绕圆柱的无粘流动. (a) 连续势流，(b) 无限死水区，(c) 有限尖尾流 (Batchelor, (1956)).

为了简单起见，我们仅考虑均匀平行来流绕过物体的平面、定常、不可压缩层流流动. 开始分析时，我们需要 Reynolds 数为无穷大的基本解. 当然，当 Reynolds 数超过一定数值时，

实际流动将变成非定常的和湍流状态。但我们的目的是求中等 Reynolds 数下的近似解，所以这是无关紧要的。可惜，有限物体适当的极限解是未知的，这时很可能要发生分离现象。譬如，图 7.1 表示圆柱绕流无粘 (Euler) 方程有关解的三种推测，还存在许多别的可能性。因为尾流甚至对上游的流动也会产生一阶影响，所以要到这个重要问题解决以后，才能处理有分离的流动。这就是说，物体必须是半无限的，有限平板以及或许某些极薄的薄翼则是例外。要进一步探讨这些问题，请参看 Goldstein (1960) 的书。(参看注 8)

由于转角和其它不连续性会带来极大的困难，所以我们宁可把注意力放在外形是解析函数的物体上。另一方面，Prandtl 方程只对某些相似流动才容易求解，其中大部分是相应于尖头物体的。面临这左右为难的情况，为了能把偏微分方程化成常微分方程，我们只好决定应付由尖前缘产生的困难。事实上，我们只是将其具体应用于有限或半无限平板，并指出对其它形状物体的解应作的修正。

我们假定读者熟谙经典的边界层理论的基本原理，特别是熟谙为 Prandtl (1935)，Goldstein (1938) 或 Rosenhead (1963) 给出的平板的 Prandtl-Blasius 解。

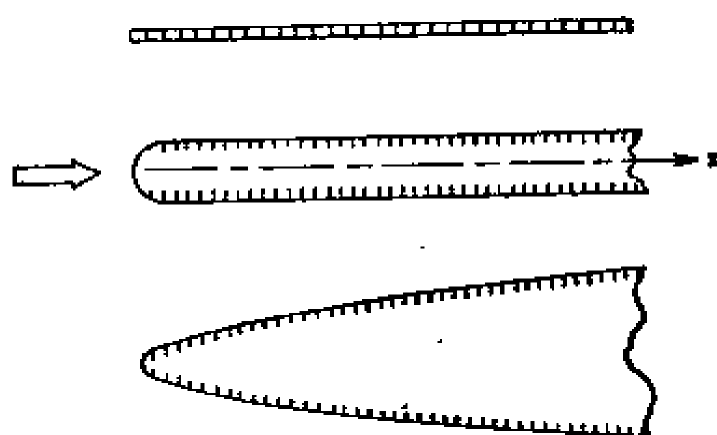


图 7.2 下游远处 Blasius 解适用的物体.

7.2 平板解的各种解释

平板的 Blasius 解在边界层理论中起着各种各样的作用。这里，我们要阐述三种本质上不同的解释。首先，它适用于半无限平板。这时，它代表了大 x 的坐标摄动。更确切地说，由于该问题只含有粘性长度 ν/U，它代表了游动 Reynolds 数 Ux/ν 很大时的渐近解。在这个意义上，它也适用于圆头厚板，甚至适用于象抛物柱逐渐增厚那种形状的物体(图 7.2)。

其次 Blasius 解适用于尖头平板(图 7.3)。这时，说来也奇怪，它是小 x 的坐标摄动。更确切地说，它是小 x/L 的渐近解，其中 L 是特征长度，譬如翼剖面的初始曲率半径。可再计算 x/L 幂级数的若干项来改进近似解。可以肯定，这个结果在离前缘中等距离处无效，在那里 $x = O(\nu/L)$。于是，我们遇到了有时在流体力学其它分支中也可能遇到的情况——譬如，高超声速小扰动理论中的幂次物体 (Hayes 和 Probstein, 1959, 2.6 节)——坐标摄动仅在小(或大)距离时有效，但距离不能**太**小(或**太**大)。有人可能认为，可以在前缘附近构造第三展开式的方法来消除该区域的非一致性。但极限问题显然恰好就是半无限平板本身。当然，在非常接近前缘处的流场由 3.9 节所述 Carrier 和 Lin 的渐近解所确定。然而，这不是第五章意义上的内解，它同 Blasius 解没有重叠区，所以不能同它相匹配 (10.9 节)。

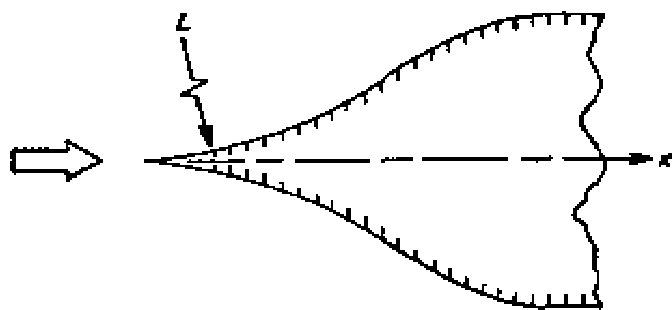


图 7.3　前缘附近 Blasius 解适用的物体.

第三，Blasius 解适用于有限平板(图 7.4)．这时，它代表参数摄动，它是以板长为参考长度的 Reynolds 数 UL/ν 很大时的渐近解．发生这种情况的原因是，有限和半无限平板的基本无粘解是相同的，还因为方程是抛物型的，所以后缘下游的尾流不会影响平板上的边界层．当然该结果是非一致有效的，在前、后缘处不适用．在前缘处的非一致性刚才讨论过了，而在后缘处的非一致性可能还要复杂些．

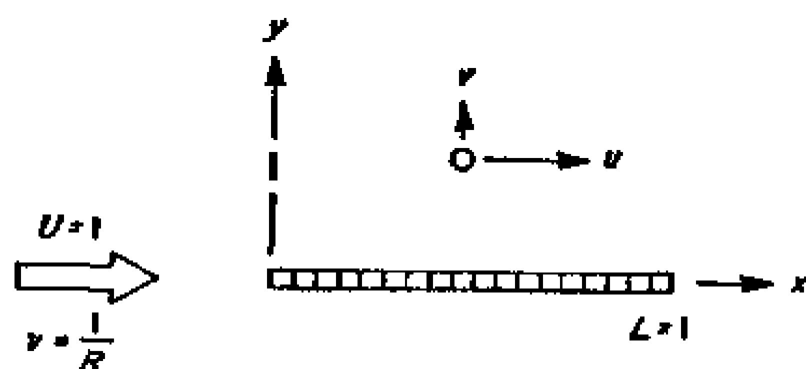


图 7.4　有限平板的记号．

Blasius 解的这三种不同解释间的区别，在高阶近似中显示出来了．我们现在来讨论第一、三种观点，即有限和无限平板的情况．关于第二种观点，请参看 Van Dyke (1962b) 的文章．

7.3　平板解的外展开；基本无粘流动

设 L 是有限平板的长度，或半无限平板的任意参考长度(譬如说，从前缘到平板上划红线处的距离)．对于后一情形，其解实际上必与 L 无关；对于前一情形，解只是在一阶精度上与 L 无关．

将所有长度都以 L 为参考长度，所有速度以 U 为参考量来引进无量纲变数是方便的．这相当于选择一种单位制，使 $L=U=1$ (图 7.4)．这时，在笛卡儿坐标系中，Navier-

Stokes 方程等价于无量纲的流函数 ψ 的方程 (2.24)，只是 ν 为以 L 为特征长度的 Reynolds 数 R 的倒数来代替:

$$R = \frac{UL}{\nu} \tag{7.1}$$

再加上在平板上速度为零的边界条件和均匀来流条件，整个问题归结为

$$\left(\psi_y \frac{\partial}{\partial x} - \psi_x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{R}\nabla^2\right)\nabla^2\psi = 0 \tag{7.2a}$$

$$\psi(x, 0) = 0 \tag{7.2b}$$

$$\psi_y(x, 0) = 0 \left(0 < x < \begin{matrix} 1，有限平板 \\ \infty，无限平板 \end{matrix}\right) \tag{7.2c}$$

$$\psi(x, y) \sim y \qquad \text{(上游处)} \tag{7.2d}$$

我们来求 Reynolds 数 R 为无穷时，这个问题的渐近解。因为问题中的摄动参数仅以 $1/R$ 的形式出现，人们总假定合适的渐近序列由 $1/R$ 的幂函数构成。然而，Prandtl 理论告诉我们，这是不正确的。因此，我们采用更可靠的方法，让渐近序列待定，并假定一个简单的(外)展开式为如下形式:

$$\psi(x, y; R) \sim \delta_1(R)\psi_1(x, y) + \delta_2(R)\psi_2(x, y) + \cdots$$

$$当\ R \to \infty, \qquad x, y > 0，并固定不变 \tag{7.3}$$

将它代入整个问题，当 $R \to \infty$ 时取极限，对上游条件 (7.2d) 我们得到

$$\psi_1(x, y) \sim \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{\delta_1(R)}\right] y\ \text{(上游)} \tag{7.4}$$

这里出现的极限可能是零、无穷或有限。如果极限是零，问题是齐次的，其解(若是唯一的)便是 $\psi_1 = 0$。若极限是无穷大，问题就没有意义。因此，仅当极限为有限时，才能获得有意义的结果。不失一般性，我们取

$$\delta_1(R) = 1 \tag{7.5}$$

这时，一阶近似方程就成为无粘流的方程

$$\left(\psi_{1y}\frac{\partial}{\partial x}-\psi_{1x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\nabla^2\psi_1=0 \tag{7.6a}$$

根据这个方程，涡量只是简单地发生对流，准确到一阶近似，粘性扩散可以忽略。(2.1) 节给出了一个首次积分

$$\nabla^2\psi_1=-\omega_1(\psi_1) \tag{7.6b}$$

这就是说，涡量 $-\nabla^2\psi_1$ 只是流函数的某个函数 ω_1，因此，它沿着流线为常数。该函数的形式由上游远处的流场来确定。在这个问题中它为零，正如只要来流是无旋的，它就等于零一样。因此，关于外展开的首项，问题就成为

$$\nabla^2\psi_1=0 \tag{7.7a}$$

$$\psi_1(x,0)=0 \tag{7.7b}$$

$$\psi_1(x,y)\sim y \quad (\text{上游}) \tag{7.7c}$$

这里，无滑移条件 $\psi_{1y}(x,0)=0$ 已被丢弃了，因为它是实现不了的。由于略去了粘性项使微分方程降低了一阶，因此必须放弃一个边界条件。在简单的问题中，至于哪个边界条件该放弃这可以从数学上来解决；这里，我们必须凭经验和物理知识来作指南。

这个问题的解是

$$\psi_1(x,y)=y \tag{7.8}$$

它只是简单地代表了均匀平行流，当 Reynolds 数为无穷时，平板不引起任何扰动。其它任何平面物体无分离的相应解就是无粘性位势流动。

7.4 内展开；边界层方程；匹配

丢失高阶导数项是奇异摄动问题的典型特征 (5.2 节)。我们知道，基本无粘解在物面附近无效，因为在那里必须放弃无滑移条件。所以，非一致性的区域是一条线的邻域，而不是

象第四章的薄翼问题那样，只是一个点的邻域。可以让 x 保持不变并放大法向坐标 y，使在该区域中的坐标为 1 的数量级。

Prandtl 凭物理直觉，并用同简单精确解相比较的方法得到了合适的放大因子．但我们多少可以形式地来进行．假定非一致性的(边界层)区域宽度是 $\Delta_1(R)$ 量阶的，其中 Δ_1 是某个函数，当其自变量为无穷时它等于零．这时，适当放大了的(内)法向坐标为 $Y = y/\Delta_1(R)$，其中伸缩因子 $1/\Delta_1(R)$ 仍是待定的．至于因变量，无论在边界层外，还是在边界层内，$u = \psi_y$ 必须为 1 的数量级，这一点至少在物理上是清楚的．所以

$$\psi = O(y) = O(\Delta_1)$$

这就是说，ψ 必须象 y 一样放大一个相同的因子．

推广到高阶近似，我们假定如下形式的内展开，它在边界层内有效：

$$\psi(x, y; R) \sim \Delta_1(R)\Psi_1(x, Y) + \Delta_2(R)\Psi_2(x, Y) + \Delta_3(R)\Psi_3(x, Y) + \cdots$$

$$(\text{当 } R \to \infty,\ x,\ Y \text{ 固定}) \tag{7.9a}$$

其中

$$Y = \frac{y}{\Delta_1(R)} \tag{7.9b}$$

Δ_n 是渐近序列，它使 Ψ_n 在 $Y = O(1)$ 的边界层内的量阶都为 1．我们把上述这个展开式代入 Navier-Stokes 方程(7.2a)，两边乘以 Δ_1，并令 R 趋于无穷来确定 Δ_1．这就导出

$$\left(\Psi_{1Y}\frac{\partial}{\partial x} - \Psi_{1x}\frac{\partial}{\partial Y}\right)\Psi_{1YY} = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{R\Delta_1^2(R)}\right]\Psi_{1YYYY} \tag{7.10}$$

这里出现的极限仍可能是零、无穷或有限．前两种可能性会使解退化．该解不能满足内边界条件并同外解匹配，因此，我们选择第三种可能性．也就是说，象上节一样我们又一次应用了最小退化原理(参看 5.5 节)． 不失一般性，我们取常数极限为 1，得到

$$\Delta_1(R) = R^{-1/2}, \quad Y = R^{1/2}y \tag{7.11}$$

这样，我们又得到大家熟知的结果，边界层厚度正比于 $R^{-1/2}$．

内展开的首项的方程现在变成

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial Y^2} - \Psi_{1Y}\frac{\partial}{\partial x} + \Psi_{1x}\frac{\partial}{\partial Y}\right)\Psi_{1YY} = 0 \tag{7.12a}$$

这是一个全微分，它可以写成

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left(\Psi_{1YYY} + \Psi_{1x}\Psi_{1YY} - \Psi_{1Y}\Psi_{1xY}\right) = 0 \tag{7.12b}$$

进行积分就得到一个三阶方程

$$\Psi_{1YYY} + \Psi_{1x}\Psi_{1YY} - \Psi_{1Y}\Psi_{1xY} = f(x) \tag{7.12c}$$

积分函数 $f(x)$ 正比于无粘流的物面压力梯度，我们将用同基本无粘流匹配的方法证明这一点．由无粘流确定 $f(x)$，并提供一个外边界条件．

取 $m = n = 1$，我们来系统地应用匹配原理 (5.24)．在这一步只要匹配 ψ_y 就够了，而且也较为方便，而不用 ψ 本身来进行匹配．ψ_y 的物理意义是切向速度． 运用前面的结果 (7.3)，(7.5)，(7.8)，(7.9) (7.11)，对任意平面物体．我们可得

一项外展开： $\psi_y \sim \psi_{1y}(x, y)$ (7.13a)

记为内变数： $= \psi_{1y}\left(x, \dfrac{Y}{\sqrt{R}}\right)$ (7.13b)

对大 R 展开： $= \psi_{1y}(x, 0) + \dfrac{Y}{\sqrt{R}}\psi_{1yy}(x, 0) + \cdots$ (7.13c)

一项内展开： $= \psi_{1y}(x, 0)$ (7.13d)

一项内展开 $\psi_{y} \sim \Psi_{1Y}(x, Y)$ (7.14a)

记为外变数: $= \Psi_{1Y}(x, \sqrt{R}y)$ (7.14b)

对大 R 展开: $= \Psi_{1Y}(x, \infty) + \cdots$ (7.14c)

一项外展开: $= \Psi_{1Y}(x, \infty)$ (7.14d)

这里，我们利用了函数 ϕ_1 和 Ψ_1 的某些性质. 在 (7.13c) 中，利用了 $\phi_1(x, y)$ 在 $y = 0$ 处关于 y 是解析的性质；在 (7.14c) 中，假定 Y 趋于无穷时 Ψ_1 有极限. 令最后两个结果相等，得出了所需的匹配条件:

$$\Psi_{1Y}(x, \infty) = \phi_{1y}(x, 0) \tag{7.15a}$$

可以看出这就是大家熟悉的，边界层外缘 ($Y = \infty$) 处的速度等于位势流的速度 $\phi_{1y}(x, 0)$ 的条件. 如果我们匹配 ψ 本身，结果为

$$\Psi_1(x, Y) \sim Y\phi_{1y}(x, 0) + o(Y) \quad (Y \to \infty \text{ 时}) \tag{7.15b}$$

它可由 (7.15a) 积分而得. 匹配条件是作为在大 Y 时渐近展开式的首项这个意义上来理解的.

在 $Y = \infty$ 处计算边界层方程 (7.12c)，匹配条件便可用来确定积分函数 $f(x)$，结果就是通常的 Prandtl 边界层方程

$$\Psi_{1YYY} + \Psi_{1x}\Psi_{1YY} - \Psi_{1Y}\Psi_{1xY} = -\phi_{1y}(x, 0)\phi_{1xy}(x, 0) \tag{7.16a}$$

根据 Bernoulli 方程，方程右边是无粘流中(无量纲的)物面的压力梯度. 实际上，上述方程适用于任意的平面物体，其中 x 为沿着物面的距离，y 为垂直于物面的距离，这是因为物面曲率仅对边界层理论的二阶近似有影响的缘故. 有关的边界条件是物面上速度为零，如果取 ψ 在物面上也为零，它们为

$$\Psi_1(x, 0) = \Psi_{1Y}(x, 0) = 0 \tag{7.16b}$$

以及匹配条件 (7.15). 尽管后者在确定积分函数时已经使用过了，但因为 $Y = \infty$ 处是奇点，这个条件要起双重作用，所以

依然保留着。

虽然原先的 Navier-Stokes 方程 (7.2a) 是椭圆型的，但边界层方程 (7.16a) 是抛物型的， x 为类时间变量． 方程类型的这种变化(参看 3.11 节)意味着对上游的影响被抑止了。因此，平板的一阶边界层完全不受其后缘及尾流的影响。

7.5 平板边界层的解

平板的无粘解式 (7.8) 不存在压力梯度，边界层问题就成为

$$\Psi_{1YYY} + \Psi_{1x}\Psi_{1YY} - \Psi_{1Y}\Psi_{1xY} = 0 \qquad (7.17a)$$

$$\Psi_1(x, 0) = 0 \qquad (7.17b)$$

$$\Psi_{1Y}(x, 0) = 0 \quad \left(0 < x < \begin{cases} 1, & \text{有限平板} \\ \infty, & \text{半无限平板} \end{cases}\right) \qquad (7.17c)$$

$$\Psi_{1Y}(x, \infty) = 1 \qquad (7.17d)$$

有限平板上、下表面的边界层在后缘处汇合在一起，并作为无分离的尾流离开平板(图 7.5)．在尾流中，边界层理论显然依然有效，其压力梯度仍等于零．唯一的改变是用对称性条件代替无滑流条件 (7.17c)。

$$\Psi_{1YY}(x, 0) = 0 \qquad (1 < x) \qquad (7.17c')$$

但是，我们只详细研究到后缘为止的边界层，因为在这以后的

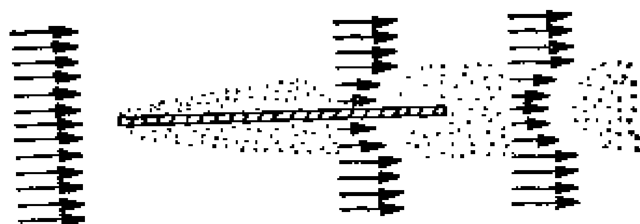


图 7.5 有限平板的边界层及尾流．

流场不是相似的。

在平板上存在相似解，因为该问题具有某种**群的性质**

(group property)，这种性质可以把问题化为常微分方程．这种性质可由下述事实表达出来，即在变换

$$\Psi_1 \to c\Psi_1,\ x \to c^2 x,\ Y \to cY \tag{7.18}$$

下，问题(7.17)是不变的．在量纲分析中——这时，在尺度变换下的不变性是物理上的必要性，而不是象这里那样是一种数学事实——这就意味着其解(若是唯一的)不能个别地同变量、Ψ, x 及 Y 有关，而是同它们的组合有关．这些组合在上述变换下是不变量．其中的某些形式为

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\Psi_1}{Y}\\[2ex]\dfrac{\Psi_1}{\sqrt{x}}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\dfrac{x}{Y^2}\\[2ex]\dfrac{Y}{\sqrt{x}}\end{array}\right. \text{的函数} \tag{7.19}$$

我们选择后者． 按 Falkner-Skan 的标准记法 (Schlichting 1960, p. 143; Rosenhead, 1963, p. 222)，还要引进一个2的因子：

$$\Psi_1(x_1,\ Y) = \sqrt{2x}\,f(\eta),\ \eta = \frac{Y}{\sqrt{2x}} \tag{7.20}$$

这时再回到原先的有量纲变量表明，L 不再出现在 f_1 及 η 中． 这是同如下的事实相一致的：对于半无限平板，L 是任意的；对于有限平板边界层，L 是无关紧要的．这是进行群变换的另一出发点．

将式(7.20)代入边界层问题(7.17)导出

$$f_1''' + f_1 f_1'' = 0 \tag{7.21a}$$

$$f_1(0) = f_1'(0) = 0 \tag{7.21b}$$

$$f_1'(\infty) = 1 \tag{7.21c}$$

这是 Prandtl-Blasius 问题，但没有早期文献中2的因子．它必须用数值积分．Blasius 原先将一个小 η 的级数解同大 η 的渐近解拼接．但 Weyl (1942) 指出，这是不可靠的．因为第

一个级数只有中等大小的收敛半径（第二个级数可能根本不收敛）。若用数值积分从 $\eta=0$ 积到某适当大的 η 值，比如说 $\eta=5$ 或 10 处，这就更有把握，现在有了电子计算机也更为简单些.

这是一个两点边值问题，它通常要重复地猜测 $f_1''(0)$ 的值，使解满足大 η 的条件 (7.21c)。但是对于这个问题，我们可利用解的另一个群的性质来避免这种复杂性。微分方程 (7.21a) 及初始条件 (7.21b) 在变换

$$f_1 \to c f_1, \qquad \eta \to \frac{1}{c}\eta \tag{7.22}$$

下是不变的。因此，我们可用 $f_1''(0)=1$ 代替 (7.21c) 来积分问题 (7.21)，然后选取常数 c 使解满足无穷远处的条件 (Goldstein, 1938, p. 135; Rosenhead, 1963, p. 223)。

为达到我们的目的，数值解的主要结果包含在如下关于小 η 和大 η 的展开式中：

$$f_1(\eta)=\frac{1}{2}\alpha_1\eta^2+O(\eta^5),\ \alpha_1=0.469600 \tag{7.23a}$$

$$\sim \eta-\beta_1+\exp,\quad \beta_1=1.21678 \tag{7.23b}$$

其中，exp 代表大 η 时以指数律衰减的小项。这就表示，在壁面因剪切产生的涡量在穿过边界层时，衰减得比 η 的任意次幂还要快。同热扩散现象相类比，(Rosenhead, 1963, p.216) 或用某种数学论证的方法 (Stewartson, 1957; Chang, 1961) 都说明这一结论对所有边界层都适用。下面，我们会看到，对于一些不能自动满足这一要求的情形，必须规定涡量以指数律衰减的条件。

7.6 Blasius 解的唯一性

从数学上来看，问题 (7.17) 的上述这个解不是唯一的，

它可以迭加上本征解无限、离散集合中的任一个函数，这些本征解的每一个都满足由 (7.17a) 导出的线性摄动方程以及零初始条件 (7.17b)，(7.17c)，并在无穷远处以指数律衰减 (Stewartson, 1957; Libby 和 Fox, 1963)。它们的形式为

$$\Psi_1^{(m)}(x, Y) = C_m x^{\frac{1}{2}-\lambda_m} e_m(\eta) \qquad (7.24a)$$

其中 C_m 为任意常数，并且 (Libby, 1965)

$$\lambda_m = 1, \ 1.887, 2.814, 3.758, 4.704, \cdots \qquad (7.24b)$$

第一个本征解是 Blasius 解 (7.20) 关于 x 的导数:

$$\Psi_1^{(1)} = C_1 x^{-1/2}[f_1(\eta) - \eta f_1'(\eta)] \qquad (7.25)$$

在物理上，它表示坐标原点实际位置的微小不定性；同样地，高阶本征解表示了前缘附近流场的另一些不定性，但不象第一本征解那样有如此简单的解释。Stewartson (1957) 讨论了为什么在边界层下游的展开式中会引起这种不定性，其原因是没有规定初始条件(参看 3.10 节)。

在这一步，我们可借助于最小奇性原理(4.5 节)将所有这些本征解合理地排除在外。然而，了解为什么最小奇性原理适用于这个问题对我们更有启发。因为参考长度 L 及与此相关的参数 R 是人为地选择的，所以无量纲变数必须以 $R\phi$，Rx，Ry 的形式出现，这样才能使结果中不出现 L。Blasius 解是具备这一性质的。仅当 C_1 为 R^{-1} 量阶时，第一本征解 (7.25) 才具备这种性质。这就是说，它是隶属于三阶近似而不是隶属于一阶近似的 (7.11 节)；同样地，高阶本征解隶属于更高阶的近似，这是对具有**人工参数**问题常用的论证方法；读者要深入了解可参考 Lagerstrom 和 Cole (1955)，Chang (1961) 及习题 (4.8)。

上述论证不适用于具有真实几何长度 L 的钝头平板。对这个问题，在一阶边界层的渐近展开式中，所有本征解确实都被保留下来了。因为出现奇性更高的项，所以最小奇性原理

不能把它们排除在外. 譬如,抛物柱的展开式在 Blasius 解同第一本征解间，含有一项 $x^{-1/2}\log x$ 阶的项，所得摩阻的表达式为第三章的方程(3.27). 在 10.9 节，我们将说明怎样用同头部的展开式相连接或同数值解相拼接的方法来确定常数 C_1 的。

7.7 由位移厚度引起的流动

从 5.9 节可见，对于边界层理论的正问题，必须遵循图 5.6 所示的正常匹配次序. 因此，我们接着来求外展开(7.3)的第二项。

同边界层解相匹配,可以同时得到因子 $\delta_2(R)$ 的性质及匹配条件. 在这一步,仅匹配 ψ_y 是不够的. 与此同时,必须还要匹配 ψ 本身或 ψ_x. 运用以前的那些结果,我们得到

一项内展开: $$\psi\sim\frac{1}{\sqrt{R}}\sqrt{2x}f_1(\eta) \tag{7.26a}$$

记成外变数: $$=\frac{1}{\sqrt{R}}\sqrt{2x}f_1\left(\frac{\sqrt{R}y}{\sqrt{2x}}\right) \tag{7.26b}$$

对大 R 展开: $$=\frac{1}{\sqrt{R}}\sqrt{2x}\left(\frac{\sqrt{R}y}{\sqrt{2x}}-\beta_1+\exp\right) \tag{7.26c}$$

二项外展开: $$=y-\frac{1}{\sqrt{R}}\beta_1\sqrt{2x} \tag{7.26d}$$

记为内变数: $$=\frac{Y}{\sqrt{R}}-\frac{1}{\sqrt{R}}\beta_1\sqrt{2x} \tag{7.26e}$$

二项外展开: $$\psi\sim y+\delta_2(R)\psi_2(x,y) \tag{7.27a}$$

记为内变数: $$=\frac{Y}{\sqrt{R}}+\delta_2(R)\psi_2\left(x,\frac{Y}{\sqrt{R}}\right) \tag{7.27b}$$

对大 R 展开: $$=\frac{Y}{\sqrt{R}}+\delta_2(R)[\psi_2(x,0)+\cdots] \tag{7.27c}$$

式(7.26c)中,我们用了 Blasius 函数 f_1 的渐近展开式(7.23b),

在式 (7.27c) 中，利用了 ψ_2 象 ψ_1 一样在 $y=0$ 处是 y 的解析函数的条件。

现在，我们在 $m=1$, $n=2$ 时来应用渐近匹配原理 (5.24). 比较 (7.26e) 及 (7.27c)，说明 $\delta_2(R)$ 必须是 $R^{-1/2}$ 乘以某个常数，我们取

$$\delta_2(R)=\frac{1}{\sqrt{R}} \tag{7.28}$$

由此得出

$$\psi_2(x,0)=-\beta_1\sqrt{2x} \tag{7.29a}$$

其物理解释就是大家所熟悉的边界层位移厚度。代人 (7.27) 说明流函数的外展开在 $y=\beta_1 R^{-\frac{1}{2}}(2x)^{1/2}$ 处等于零。所以，边界层象头部半径为 β_1^2/R 的抛物柱固壁那样把无粘流向外排开。匹配条件 (7.29a) 正是把位移抛物柱上的切向条件挪到轴上后的线性化薄翼近似 (4.2 节)。

将 (7.29a) 关于 x 微商得到另一种形式的条件，它具有略微不同的物理解释：

$$-\psi_{2x}(x,0)=\frac{\beta_1}{\sqrt{2x}} \tag{7.29b}$$

这是物面上外流法向速度的二阶分量，要求它等于位移抛物柱的斜率。从这个观点来考虑问题，边界层位移效应同面源分布起着同样的作用，这就是 4.3 节的薄翼条件。Lighthill (1958) 对位移效应的各种解释进行了详尽讨论。

将外展开 (7.3) 代人完整的方程 (7.2a) 得到 ψ_2 的线性化方程：

$$\left(\psi_{1y}\frac{\partial}{\partial x}-\psi_{1x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\nabla^2\psi_2+\left(\psi_{2y}\frac{\partial}{\partial x}\right.$$
$$\left.-\psi_{2x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\nabla^2\psi_1=0 \tag{7.30a}$$

正象摄动方法中通常所见到的那样，非线性对流项分成两项，它们分别表示二阶涡沿着一阶流线的对流以及一阶涡沿着流线二阶修正的对流. 对本问题以及只要来流无旋的情况，第二项等于零. 于是，(7.30a) 就有首次积分

$$\nabla^2\psi_2 = -\omega_2(\psi_1) \tag{7.30b}$$

但来流无旋时，二阶外涡也等于零，所以 ψ_2 满足 Laplace 方程。

7.8 半无限平板的二阶边界层

对于半无限平板，由位移厚度引起的流动问题为

$$\nabla^2\psi_2 = 0 \tag{7.31a}$$

$$\psi_2(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \quad (7.31b) \\ -\beta_1\sqrt{2x}, & x > 0 \quad (7.31c) \end{cases}$$

$$\psi_2(x, y) = o(y), \quad \text{上游} \tag{7.31d}$$

对称流动的条件 (7.31b) 排除了绕着平板作环流运动的可能性. 这是位势流动绕过位移抛物柱 $y = \beta_1(2x/R)^{1/2}$ 的线性化薄翼问题. 我们只需要 4.8 节所求出的表面速度即可. 但从复变函数论显然可知，整个问题的解为

$$\psi_2(x, y) = -\beta_1 \mathrm{Re}\sqrt{2(x + iy)} \tag{7.32}$$

其中 Re 指实部.

可如前所述那样，在 $m = n = 2$ 时应用匹配原理得到 (7.9a)式中 $\Delta_2(R)$ 的形式以及关于 φ_2 的匹配条件。将(7.13)的步骤继续下去，得到 ψ_y 二项外展开的二项内展开为

$$\psi_y \text{ 二项外展开的二项内展开} = 1 + \frac{0}{\sqrt{R}} \tag{7.33a}$$

我们列出二阶项是因为对于任何别的问题（包括有限平板问题在内)该系数是不等于零的. 反之，我们得到

ψ_y 二项内展开的二项外展开

$$= 1 + R^{1/2}\Delta_2(R)\Psi_{2Y}(x,\infty) \tag{7.33b}$$

这里我们假定 $\Psi_{2Y}(x, \infty)$ 存在;关于极限不存在的情况,请参看习题 7.2。

匹配表明,通常应取

$$\Delta_2(R) = \frac{1}{R} \tag{7.34}$$

从而使内外展开式都以 Reynolds 数的负 1/2 次幂的幂级数来表达。这个结论对于解析物体是正确的(Van Dyke, 1962a)。但对于有角点的物体,在 7.11 节中,我们将看到它仅准确到二阶近似. 对于一般物体进行匹配就给出了一个关于 $\Psi_{2Y}(x, \infty)$ 的条件,它的物理意义是边界层外缘的切向速度增量. 对于平板,我们得

$$\Psi_{2Y}(x,\infty) = 0 \tag{7.35}$$

因为在 $y = 0$ 处位移速度为零. 无限抛物柱有这样一个独特的性质: 在薄翼理论中,表面速度恰好是来流速度.

将内展开 (7.9) 式代入完整的方程 (7.2a) 又可得到关于 Ψ_2 的完全微分

$$\frac{\partial}{\partial Y}(\Psi_{2YYY} + \Psi_{1x}\Psi_{2YY} - \Psi_{1Y}\Psi_{2xY} + \Psi_{2x}\Psi_{1YY}$$

$$- \Psi_{2Y}\Psi_{1xY}) = 0 \tag{7.36}$$

它仅对平板等于零,对于任何其它形状的物体,右边要包含正比于当地表面曲率的项 (Van Dyke, 1962a)。

对所有物体,表面上的边界条件为 $\Psi_2(x, 0) = \Psi_{2Y}(x, 0) = 0$. 因此,半无限平板的 Ψ_2 满足一个完全齐次方程,只要它的解是唯一的,它就应该等于零. 虽然,由于叠加任一个本征解 (7.24) 可使解不唯一,但从 (7.6) 节的论证说明,本征解要到下一阶近似才能出现. 所以,$\Psi_2(x, Y) = 0$, 完整的

二阶近似为

$$\phi(x, y; R) \sim \begin{cases} y - \dfrac{1}{\sqrt{R}} \beta_1 \mathrm{Re}\sqrt{2(x+iy)}, & \text{外解} \quad (7.37a) \\ \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{R}} f_1\left(\dfrac{\sqrt{R}\,y}{\sqrt{2x}}\right) + \dfrac{0}{R}, & \text{内解} \quad (7.37b) \end{cases}$$

7.9 有限平板的二阶边界层

Prandtl 本人讨论过 (Prandtl, 1935, p. 90) 怎样用逐次近似法来改进 Blasius 解(参看注8):

> "不用简单的平行流而采用抛物柱的绕流，它将略微改变原先的压力分布. ……对这种新的压力分布再重复进行上述的计算；必要时，可以在新测得的位移厚度基础上重复上述过程".

然而，由于抛物柱所特有的这种巧合，上述方法得到的半无限平板的二阶量为零.

另一方面，对有限平板，由 Prandtl 的方法可得出有意义的结果。郭永怀 (Kuo, 1953) 进行了详细计算，但在某些方面有不同意见. 因为边界层方程是抛物型的，Blasius 解仅在后缘以前有效. 后缘以后尾流的位移厚度很难计算 (Rosenhead, 1963, p. 280). 郭永怀作了一个也许是合理的假设，即取它为常数，该常数等于后缘处的位移厚度(图 7.6). 于是，在由位移厚度引起的流场中，表面速度略有增加. 如果我们把尾流中位移厚度同无限平板的位移厚度之差 (它在平板表面上没有作用)看作为汇分布，这一点是很明显的.

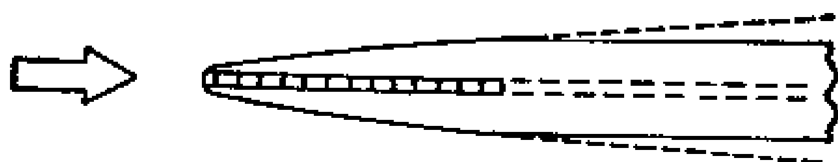


图 7.6 有限平板位移厚度的形式.

这个薄翼问题可用第四章的方法求解．于是，二阶匹配条件（7.35）应为下式所代替：

$$\Psi_{2_1}(x,\infty)=\frac{\beta_1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\beta_1}{\pi}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{5}+\cdots\right)\qquad(7.38)$$

上述函数在后缘处是对数型无穷大，在该处，所示的级数展开式不收敛．然而，郭永怀相应地展开 Ψ_2 为

$$\Psi_2(x,Y)=\frac{2\beta_1}{\pi}\left[x^{1/2}f_1(\eta)+\frac{1}{3}x^{3/2}f_2(\eta)+\cdots\right]$$

$$(7.39)$$

来求解二阶边界层方程（7.36）．前九个函数的问题已进行数值积分，其余的函数用近似方法求解．这样，郭永怀就计算了总的摩擦阻力的缓慢收敛级数之和．单面平板的结果为

$$c_F\equiv\frac{\int_0^L\tau\,dx}{\frac{1}{2}\rho U^2L}\sim\frac{1.328}{\sqrt{R}}+\frac{4.12}{R}+\cdots\qquad(7.40)$$

其中 τ 为剪应力．上述结果同 Reynolds 数小到 10 时的实验结果十分吻合．然而，由于为郭永怀所忽视的另外一个因素，系数 4.12 将要增大些．该因素在下一节讨论．

7.10 当地摩阻和总摩阻

再来考虑半无限平板，由两项内展开（7.37b）我们计算当地摩阻系数为

$$c_f\equiv\frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U^2}\sim\frac{0.664}{\sqrt{R_x}}+\frac{0}{R_x}+\cdots\qquad(7.41)$$

这里 $R_x = Ux/\nu$ 是以离开前缘距离为特征长度的当地 Reynolds 数。其中第一项是可积的，得出平板单侧的总摩阻系数的经典数值：

$$c_F = \frac{\int_0^x c_f dx}{x} \sim \frac{1.328}{\sqrt{R_x}} + \cdots \tag{7.42}$$

由于渐近展开式在前缘附近无效，式 (7.41) 第二项除了系数为零的情况外是不可积的．但 Imai (1957a) 采用了一种巧妙的方法计算了总摩阻的第二项．他考虑了大的周线内的动量平衡来迴避前缘处的困难(图 7.7)．这相当于 Jones 处理薄翼理论中的前缘阻力所采用的办法一样 (4.6 节)． 利用边界层内的 Blasius 解以及因位移厚度引起的外流，他求出

$$c_F \sim \frac{1.328}{\sqrt{R_x}} + \frac{2.326}{R_x} + \cdots \tag{7.43}$$

令人吃惊的是，为了发现由一项边界层解可给出两项摩擦阻力这一事实，竟化费了五十年的时间．

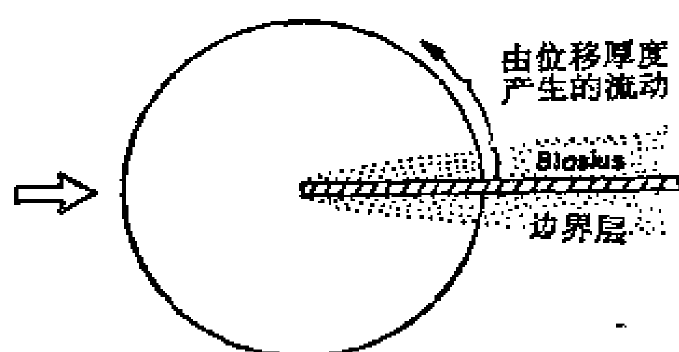


图 7.7 半无限平板的动量围线．

虽然具体计算很复杂，从 4.6 节所述来看，上述结果是明显的．式 (7.43) 的第一项来自边界层内部围线上的积分，它就是经典的结果式 (7.42)． 第二项来自围线其余部分的积分，在这些地方流动是无粘的．因此，正如头部半径为 a =

β_1^2/R 的位移抛物柱的前缘距力式 (4.22) 一样，常数 2.326 就是 $\frac{1}{2}\pi\beta_1^2$.

所以，式 (7.43) 的第二项代表了作用在前缘上的力. 当然，它仅是在边界层理论总的尺度意义上的集中力. 实际上，它必定是在当地 Reynolds 数为一的数量级的前缘附近，当地摩阻超过 Blasius 值的结果. 对于那个区域内的流动，除了可假定有 (3.24) 的形式外是一无所知的(参看注 8).

因为这是一个局部效应，集中力也将出现在有限平板的前缘，这一点为郭永怀忽视了. 考虑了这一因素及前述的修正，式 (7.40) 中的系数 4.12 应为 5.3 左右. 如果计及三阶效应，这个结果依然合情合理地同实验是一致的.

有人可能要问，在后缘是否也有集中力呢？经反复思考，情况确实如此. 但是，前缘是暴露在来流中的；而后缘是淹没在相对来说较厚的边界层内的，因此，后缘力的贡献仅仅是正比于 $R^{-3/2}$ 的三阶项. 在 Janssen (1958) 关于有限平板的数值解中，可以清楚地看到前、后缘的这种差别.

7.11 半无限平板的三阶近似

仅对半无限平板研究过三阶边界层理论. 在这一步，由于前缘的非解析性带来的困难更严重了. 由于某种原因，Alden (1948) 的首次尝试及其它人的工作都是不正确的；Goldstein (1956) 和 Imai (1957a) 得出了正确解，并在 Goldstein (1960) 的书中进行了详细的论述.

所有上述分析都采用了抛物坐标系，但我们仍然沿用笛卡儿坐标系. 可以看到，外展开的第三项等于零，因为它代表了边界层中的二阶项的位移效应，而这二阶项是等于零的. 边界层内三阶近似方程为(因 $\Psi_2=0$)

$$\frac{\partial}{\partial Y}(\Psi_{3YYY}+\Psi_{1X}\Psi_{3YY}+\Psi_{1YY}\Psi_{3X}-\Psi_{1Y}\Psi_{3XY}-\Psi_{1XY}\Psi_{3Y})$$

$$=(\Psi_{1Y}\Psi_{1XXX}-\Psi_{1X}\Psi_{1XXY}-2\Psi_{1XXYY})$$

$$\times\lim_{R\to\infty}\left[\frac{R^{-3/2}}{\Delta_3(R)}\right] \tag{7.44}$$

为了平衡方程右端的非齐次项，内展开 (7.9) 中必须有满足 $\Delta_3(R)=1/R^{3/2}$ 的项，这样就得到了 Alden 所解的问题．然而，我们发现总的涡量当 η 很大时仅以幂次律衰减，这是不能允许的(7.5 节)，困难来自于尖前缘．对于解析物体，从驻点开始就存在着意义明确的边界层，涡以指数律衰减是自动满足的；另一方面，在平板尖前缘附近，边界层近似无效．纵使它在远下游处可以使用边界层近似，但指数衰减是不能得到保证的，这个条件必须硬性加以规定．

可以在 Ψ_3 中增加一项 $\log x$ 的项来达到这一目的． 这时，由于解同 L 无关，必须还有

$$\Delta_3'(R)=(\log R)/R^{3/2}$$

阶的相应项．这样一来，可求出如下形式的内展开：

$$\psi(x,y;R)\sim\frac{1}{\sqrt{R}}\sqrt{2x}\,f_1(\eta)+\frac{0}{R}$$

$$+\frac{1}{R^{3/2}}\left[\log Rx\,\frac{f_{32}(\eta)}{\sqrt{2x}}+\frac{f_{31}(\eta)}{\sqrt{2x}}\right]+\cdots \tag{7.45}$$

虽然 f_{32} 的问题是齐次的，但其解不是零，而是第一本征解 (7.25)． 适当地选择常数 C_1 可以使 f_{31} 中的涡以指数律衰减．

还剩下最后一个困难．f_{31} 的解不是唯一的，它可以相差第一本征解，而且不知道怎样来确定其常数．所以，当地摩阻系数为

$$c_f \sim \frac{0.664}{\sqrt{R_x}} + 0.551\frac{\log R_x}{R_x^{3/2}} + \frac{C_1 - 1}{R_x^{3/2}} + \cdots \quad (7.46)$$

总摩阻系数为（Imai, 1957a）

$$c_f \sim \frac{1.328}{\sqrt{R_x}} + \frac{2.326}{R_x} - 1.102\frac{\log R_x}{R_x^{3/2}} - \frac{0.204 + 2C_1}{R_x^{3/2}} + \cdots \quad (7.47)$$

其中，常数 C_1 是未知的。如 Goldstein（1960）所述，在高阶近似中有类似的未定常数(参看注 8)。这些常数取决于前缘附近流场的情况，是否能不必精确求解上述问题，至少可从原则上来确定这些常数呢？这个问题至今还是一个谜。Imai (1957a) 用在 $R_x = 1$ 处的式(7.47)同前缘附近的近似结果(3.24)相拼接的方法来计算 C_1。

7.12 变换边界层坐标的作用

我们可以用 5.10 节的方法，把边界层解与同它相关联的外解结合起来构成合成解。现在来考虑构成单一的、一致有效展开式的另一重要途径，这就是 Kaplun（1954）的最优坐标法。在该坐标系中变换自变量，从而得到一致有效的边界层解。

我们必须首先讨论坐标变换是怎样来影响边界层解的。如果我们注意到，近来关于半无限平板的研究是在抛物坐标系中，而不是在传统的笛卡儿坐标系中进行的，那么这个问题是隐含在上节的内容中的。

如果在不同的坐标系中，重复进行整个 Prandtl 的边界层分析，也就是说，在新坐标系中列出 Navier-Stokes 方程，把流函数及垂直于物面的法向坐标放大一个 $R^{1/2}$ 的因子，再求 $R \to \infty$ 时的极限，并求解满足物面速度为零以及同基本无

粘流匹配条件的边界层方程．我们发现，虽然外展开是不变的，但边界层解是不同的，所以它代表一个改变了的流场．在不同的坐标系中，可以得到在物面上恒等、在边界层内的差别可以忽略(因此，摩阻不变)，而在边界层外可以相差甚远的解．

因此，通常在边界层外不考虑边界层解，而用与它相匹配的无粘解来代替．不过，Kaplun 的观点完全不同，他要寻找一种特定的坐标系，使得在该坐标系中的边界层解尽可能地接近于外流，以便利用这种坐标变换．

进行坐标变换时，重复边界层解是不必要的．如果在某一合适的坐标系中计算了问题的解，那么，在任一别的坐标系中的相应解可以用一种简单的法则导出．假定我们在 (x,y) 坐标系中算出了任意物体定常、平面绕流的边界层解．该坐标系不一定要是正交的．但为了方便起见，应选择成物体形状要由 $y=0$ 来描述．那么，正如 7.8 节的平板那样，边界层方法经典的前三步导出如下形式的解：

$$\psi \sim \begin{cases} \psi_1(x,y)+\dfrac{1}{\sqrt{R}}\psi_2(x,y)+\cdots \\ (R\to\infty \text{ 时 } x,\ y>0 \text{ 固定}) & (7.48\text{a}) \\ \dfrac{1}{\sqrt{R}}\Psi_1(x,\sqrt{R}y)+\cdots \\ (R\to\infty \text{ 时 } x,\ \sqrt{R}y \text{ 固定}) & (7.48\text{b}) \end{cases}$$

现在假定引进不同的坐标系 (ξ,η)．为方便起见，应使物面仍由 $\eta=0$ 来描述[这里的 η 不要同 (7.20) 的 Blasius 变数相混淆了]．若在表面上，变换是正则的，根据 Taylor 展开，得到

$$x=x(\xi,\eta)=x(\xi,0)+O(\eta) \qquad (7.49\text{a})$$

$$y=y(\xi,\eta)=\eta y_\eta(\xi,0)+O(\eta^2) \qquad (7.49\text{b})$$

由于外展开在坐标变换下是不变的，它在新坐标中的表达式可直接将变换 (7.49) 代入 (7.48a) 获得．但边界层解不同，

其新形式应将 (7.49) 代人 (7.48b)，再展开 Taylor 级数，略去以内变量表达的 R^{-1} 阶的项后求得。 所以在新坐标系中的解为

$$\phi \sim \begin{cases} \phi_1[x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)] \\ \qquad + \dfrac{1}{\sqrt{R}}\phi_2[x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)] + \cdots & (7.50a) \\ \dfrac{1}{\sqrt{R}}\varphi_1[x(\xi,0),\sqrt{R}\,\eta y_\eta(\xi,0)] + \cdots & (7.50b) \end{cases}$$

后者称为 Kaplun 相关定理(参看注 9)。

7.13 平板的其它坐标系

在笛卡儿坐标系 (x,y) 中，半无限平板的边界层解由式 (7.37) 给定。令

$$x + iy = \frac{1}{2}(\xi + i\eta), \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) \\ y = \xi\eta \end{cases} \tag{7.51}$$

以引进抛物坐标系。对于这个问题来说，它是比笛卡儿坐标要更自然的坐标系，因为 $\eta=0$ 描述了、且仅描述了整个物面。因此，在同半平面有关的其它数学物理问题以及本问题中，取这种坐标系较好。应用相关定理 (7.50) 导出抛物坐标系中的解为

$$\phi \sim \begin{cases} \xi\eta - \dfrac{1}{\sqrt{R}}\beta_1\xi + \cdots, \text{外解} & (7.52a) \\ \dfrac{1}{\sqrt{R}}\xi f_1(\sqrt{R}\,\eta) + \cdots, \text{内解} & (7.52b) \end{cases}$$

上述结果不仅在外表上得到了简化，而且在笛卡儿坐标系中，边界层的涡量在 $x=0$ 整条垂直线上为无穷，而在抛物坐标系中，仅在原点为奇异的。所以，对这个问题来说，看来抛物

坐标系比笛卡儿坐标要好.

考虑比笛卡儿坐标系要差的第三种坐标系是有益的. 如图 7.8 下半部分所示的所谓“收缩直角”坐标系 (ξ, η) 由下式来确定:

$$\xi = x, \qquad x = \xi$$

$$\eta = y + y^2, \qquad y = \frac{1}{2}(\sqrt{1+4\eta} - 1) \tag{7.53}$$

应用相关定理得到在这个坐标系中的边界层解

$$\psi \sim \begin{cases} \frac{1}{2}(\sqrt{1+4\eta} - 1) - \frac{\beta_1}{R} \operatorname{Re} \sqrt{2\xi + i(\sqrt{1+4\eta} - 1)} \\ \qquad + \cdots & (7.54a) \\ \frac{1}{\sqrt{R}} \sqrt{2\xi} f_1\left(\frac{\sqrt{R}\eta}{\sqrt{2\xi}}\right) + \cdots & (7.54b) \end{cases}$$

(参看注 9)

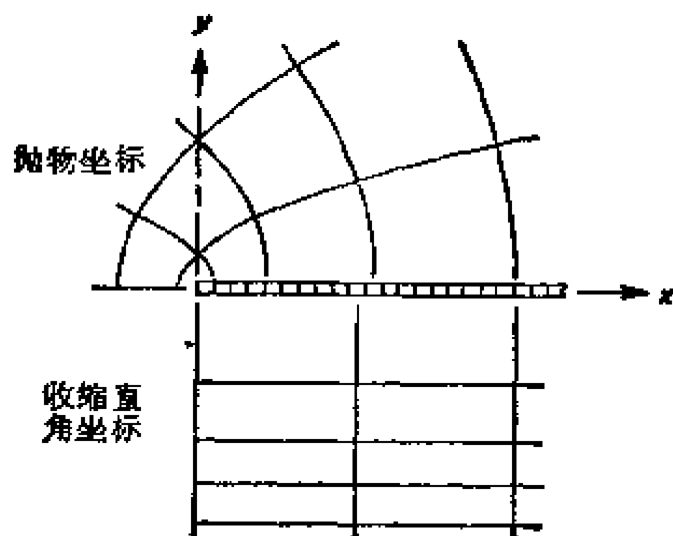


图 7.8 半无限平板的坐标系

现在我们来研究在每一种坐标系中, 边界层解在外区的性态. 我们来构造一项内展开的二项外展开, 利用 Blasius 函数的渐近公式 (7.23b) 得出

笛卡儿坐标：$y \sim \frac{\sqrt{2}\beta_1}{\sqrt{R}}\sqrt{x} + \cdots$ (7.55a)

抛物坐标：$\xi\eta \sim \frac{\beta_1}{\sqrt{R}}\xi + \cdots$ (7.55b)

收缩直角坐标：$\eta \sim \frac{\beta_1}{\sqrt{R}}\sqrt{2\xi} + \cdots$ (7.55c)

将上式同相应的外展开 (7.37a)，(7.52a)，(7.54a) 比较说明，抛物坐标系有两项相同，笛卡儿坐标系有一项相同，而收缩直角坐标系则全然不同．因此我们说，在抛物坐标系中的边界层解不仅包含了基本无粘流，而且也包含了位移厚度引起的流动．边界层解直到 $R^{-1/2}$ 阶都是一致有效的，从而使外展开成为多余的．具有上述性质的坐标系，叫最优坐标系．

根据上述定义，笛卡儿坐标系并不是最优的．不过，它可以得到包含基本无粘流的边界层解．所以，它直到一阶近似为止是一致有效的．因此，在这个问题中，我们称笛卡儿坐标是半优的．在收缩直角坐标系中的边界层解则完全不同，它对于外流毫无用处．一般说来，可以预期，最不利的情况也就是如此而已．

7.14 最优坐标的确定

Kaplun 发现，如果用线性化的 Oseen 方程来近似 Navier-Stokes 方程(第八章)，采用抛物坐标系，边界层解就是精确解(习题 8.1)，这对他寻求最优坐标是一个很大的鼓舞．这一情况以及上述的其它因素表明，在应用完全的 Navier-Stokes 方程时，平板问题采用抛物坐标系较好；我们已经看到，情况确是如此．

有人会提出这样一个问题：对于其它形状的物体，该怎样来确定其最优坐标呢？Kaplun 给了一个十分简单的解答：在

任一方便的坐标系 (x, y) 中求解到 $R^{-1/2}$ 阶；该解具有 (7.48) 的形式，那么，一种最优坐标系为

$$\xi_{opt}(x, y) = \psi_2(x, y), \quad \eta_{opt} = \psi_1(x, y) \tag{7.56a}$$

最优坐标不是唯一的，最一般的坐标系形式为

$$\begin{aligned} \xi_{opt}(x, y) &= F_1[\psi_2(x, y)] \\ \eta_{opt}(x, y) &= \psi_1(x, y)F_2[\psi_2(x, y)] \end{aligned} \tag{7.56b}$$

其中，F_1，F_2 为任意函数。

作为例子，我们还是来考虑半无限平板及笛卡儿坐标系中的边界层解 (7.37)。仅略去不重要的常数因子，由 (7.56a) 得到

$$\begin{aligned} \xi_{opt} &= \mathrm{Re}\sqrt{2(x+iy)} = \xi \\ \eta_{opt} &= y = \xi\eta \end{aligned} \tag{7.57}$$

这个坐标系是非正交的；由 (7.56b)，取 $F_2(\psi_2) = 1/\psi_2$，就可得到正交的抛物坐标系 (7.51)。

Kaplun (1954) 列举了其它一些例子。垂直于无限平面壁流动的例子是十分有趣的。对它说来，笛卡儿坐标是最优的，边界层解满足完全的 Navier-Stokes 方程。

7.15 最优坐标概念的拓广

对于二阶和高阶边界层来说，虽然还不知道寻找的法则，但最优坐标大概是存在的。估计也很可能找到三维和可压缩边界层的最优坐标(参看注 9)。

引伸到其它一类奇异摄动问题中去是更重要的推广。譬如，我们会问：第四章薄翼问题是否可以找到最优坐标。我们通过考虑厚度比为 ϵ 的椭圆的表面速度 (图 4.2) 来作一简单的试验。对应于式 (7.48)，二项外展开 (4.13) 和一项内展开 (4.46) 为

$$
\frac{q}{U} \sim \begin{cases} 1+\varepsilon\,(当\ \varepsilon\to 0\ 时,\ s>0,\ 固定) & (7.58a) \\ \sqrt{\dfrac{2S}{1+2S}}\,(当\ \varepsilon\to 0\ 时,\ S=\dfrac{s}{\varepsilon^2}\ 固定) & (7.58b) \end{cases}
$$

用新坐标 σ 来代替从前缘起度量的坐标 s，当 s 为零时，σ 也等于零，内解 (7.58b) 就变换成

$$
\frac{q}{U} \sim \sqrt{\frac{2\sigma s'(0)}{\varepsilon^2 + 2\sigma s'(0)}} \tag{7.59}
$$

这就相当于 Kaplun 相关定理 (7.50b)． 它的二项外展开等于 1．因此，在这个例子中所有坐标都是半优的，但不存在最优坐标．

上述问题以及 Kaplun 最优坐标同 Lighthill 变形坐标(第六章)间的关系，都值得进一步研究． 它们的共同点是，都想通过自变量变换来达到一致有效的目的．表面上的差别是，Kaplun 变换内坐标，而 Lighthill 则变形外坐标．就内外展开式有两重性这点来看，上述差别是无关紧要的 (5.9 节)．看来根本的差别是确定坐标变换的方式，Kaplun 要求内解尽可能地在外区有效，而 Lighthill 则规定了没有奇性这个比较粗糙的条件．可以想象，当两种方法都得到适当改进和推广后，我们会发现，它们只是代表了同一事物的两个不同侧面而已(参看 10.4 节)．

习　　题

7.1　尖楔的边界层． 试考虑半顶角为 $\beta\pi/2$ 半无限楔的对称粘性绕流．计算位势流动，并说明应怎样改变 Navier-Stokes 方程的上游条件 (7.2d)．讨论作为坐标摄动和参数摄动，边界层解的适用性． 试用群的性质证明，Prandtl 边界层方程 (7.16a) 可化为 Falkner-Skan 方程

$$
f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0
$$

假定了 f 所要求的数值性质，计算由位移厚度产生的流动．求出最优正交坐标．计算二阶边界层解．试问：在前缘是否存在集中力？

7.2 剪切流中的平板边界层． 作为外流中涡对边界层影响的模型，考虑有等强度涡平行流中的零攻角平板，来流速度为 $U-\omega y$．试导出边界层中二阶近似问题的提法，证明匹配条件的形式为

$$\Psi_2(x, Y)\sim aY^2 + bY + O(1) \qquad (\text{当 } X\to\infty \text{ 时})$$

试说明由于位移厚度效应同外涡的相互作用，在边界层中产生了二阶压力梯度．利用适当的边界条件，将问题归结为三阶常微分方程．[Murray (1961) 对这个有争议的问题给予明确的论述，并列出了早期的文献]．

7.3 边界层的反问题． 假定我们不解正问题，而是在下述意义上解边界层的反问题：求在边界层外产生给定的无粘流动的物体形状．试说明为什么其内、外展开式的渐近序列不象正问题那样是 $R^{-1/2}$ 的幂函数？并根据实际可能尽力求解在边界层外产生均匀平行流的物体上表面形状．

7.4 二阶相关定理． 试证，相应于（7.50b）的二阶相关定理为

$$\psi\sim\frac{1}{\sqrt{R}}\Psi_1[x(\xi,0), \sqrt{R}\eta y_\eta(\xi,0)] + \frac{1}{R}\Big\{\Psi_2[\,]$$

$$+\sqrt{R}\eta x_\eta(\xi,0)\Psi_{1x}[\,] + \frac{1}{2}R\eta^2 y_{\eta\eta}(\xi,0)\Psi_{1Y}[\,]\Big\}$$

式中，所有方括号中的变量同第一个方括号中的变量相同(参看注 9)．

7.5 滑流次层 如果在物体表面上允许有微小滑移，第二个边界条件 (7.16b) 应为

$$\Psi_{1Y}(x,0)=\varepsilon\Psi_{1YY}(x,0), \quad \varepsilon\ll 1$$

对 $\varepsilon=0$ 的解进行摄动，并求出直到 ε 阶的半无限平板的边界层解．注意，摄动就是基本解关于 Y 的导数 (Lin 和 Schaaf, 1951)．试说明上述近似在物体表面附近薄的次层内无效，并构造在该区域内成立的补充展开式的第一项．

第八章　小 Reynolds 数粘性流动

8.1 引言

我们现在以圆球和圆柱为例，来研究在小 Reynolds 数时，绕物体的不可压缩流动（图 8.1）. 每个大学生都知道，

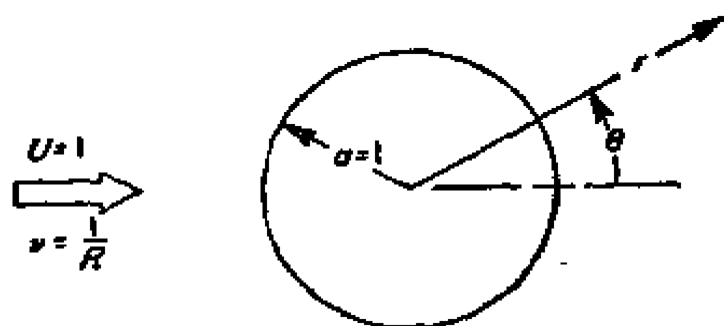


图 8.1　圆球和圆柱的记号.

Millikan 用 Stokes 于 1851 年建立的近似公式计算油滴的阻力:

$$C_D \equiv \frac{D}{\rho U^2 a^2} \sim \frac{6\pi}{R} \quad \left(当\ R \equiv \frac{Ua}{\nu} \to 0\right) \tag{8.1a}$$

1910 年 Oseen 得到了二阶近似:

$$C_D \sim \frac{6\pi}{R}\left(1 + \frac{3}{8} R\right) \tag{8.1b}$$

但直到 1957 年，人们才知道怎样用匹配渐近展开法来求以下各项[参看 (1.4)].

当取极限 $R \to 0$ 时，Navier-Stokes 方程的最高阶导数项被保留下来了，所以不存在出现奇异性的那种典型迹象. 但是这个问题包含两个特征长度：半径 a 和粘性长度 ν/U，两者的比值是 Reynolds 数. 在极限情况 $R \to 0$ 时，粘性长度将

远大于物体半径．因此，根据5.3节提出的物理判据，可以预期会有奇异性出现．

与大 Reynolds 数的粘性流动不同，小 Reynolds 数粘性流动容易进行实验观察．图 8.2 给出了当 Reynolds 数增加时，圆球或圆柱绕流的一组流谱．极低速时的流谱几乎是前后对称的；在 $R=10$（圆球）或 $R=2.5$（圆柱）时，出现封闭的环流尾迹或定常涡（此处 Reynolds 数以半径，而不是以直径为特征长度）．我们可以想象，在物体内部涡总是存在的，而到达上述 Reynolds 数时，涡穿出物体表面（参看图 8.3）；当 $R=65$（圆球）或 $R=15$（圆柱）左右时，流动就变成非定常的了．这时，尾流下游部分将发生振荡；当 $R=100$（圆球）或 $R=20$（圆柱）以上时，由于涡从物体后部发生分离，流动就变得毫无规则．

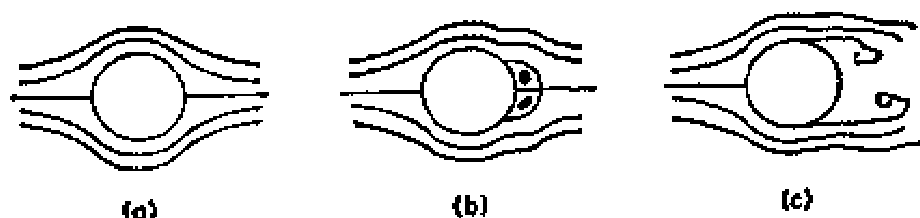


图 8-2　小 Reynolds 数时，圆球或圆柱绕流的流谱．
(a) 无涡，(b) 定常涡，(c) 非定常流．

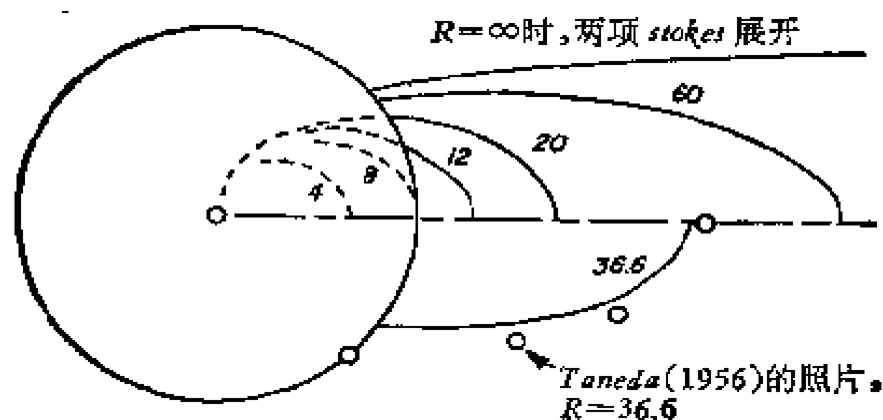


图 8.3　圆球后定常涡的形状．

8.2 圆球和圆柱的 Stokes 解

Stokes 论证了在 Navier-Stokes 方程中，为对流项所代表的惯性力可以忽略，因为它是速度的平方量阶的. 因此，小 Reynolds 数时，压力差不多完全同粘性力相平衡. 作为一阶近似，Stokes 忽略了对流项. 对平面流动，结果就是流函数的双调和方程

$$\nabla^4\psi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2\psi = 0 \qquad (8.2a)$$

它可以在形式上由 (7.2a) 令 $R \to 0$ 得到. 对轴对称流，相应的结果为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2\psi = 0 \qquad (8.2b)$$

以半径 a 为特征长度，以来流速度 v 为特征速度进行无量纲化(图 8.2)，那么物面上速度为零的条件是

$$\psi(1,\theta) = \psi_r(1,\theta) = 0 \qquad (8.3a)$$

上游均匀来流的条件为

$$\psi(r,\theta) \sim \begin{cases} r\sin\theta, & \text{平面流} \\ \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta, & \text{轴对称流} \end{cases} \quad (r \to \infty) \qquad (8.3b)$$

对圆柱来说，必须附加对称性条件使环量为零.

首先考虑圆球. 上游条件 (8.3b)启示我们采用分离变量法求 $\psi = \sin^2\theta f(r)$ 形式的解，这样便可得到

$$\psi = \sin^2\theta\left\{r^4, r^2, r, \frac{1}{r}\right\} \qquad (8.4)$$

上游条件表明: 不允许存在含 r^4 的项，含 r^2 项的系数为 1/2. 物面条件 (8.3a) 确定 r 及 $1/r$ 项的系数，得出 Stokes 近似为

$$\psi \sim \frac{1}{4}\left(2r^2 - 3r + \frac{1}{r}\right)\sin^2\theta \tag{8.5}$$

上式的首项是均匀流动，第三项是置于球心的偶极子，这两项都代表无旋流动．第二项包含了所有的涡量，Hancock(1953)称它为"Stokes 子"．他用上述三种元素的线性分布来模拟蠕虫的泳动．在无粘流动中不存在"Stokes 子"，偶极子的系数不是$\frac{1}{4}$，而是$-\frac{1}{2}$．计算摩擦阻力得到公式(8.1a)值的三分之二，其余的三分之一是压差阻力(Tomotika、Aoi, 1950)．流谱是前后对称的，因此象图 8.2 所示，不存在涡．

现在来讨论圆柱．上游条件启示我们求 $\psi = \sin\theta f(r)$ 形式的解，由此得出

$$\psi = \sin\theta\left\{r^3,\ r\log r,\ r,\frac{1}{r}\right\} \tag{8.6}$$

在物面上规定条件(8.3a)，导出

$$\psi \sim C\left[(1+2k)r\log r - \frac{1}{2}r + \frac{1+k}{2}\frac{1}{r} - \frac{k}{2}r^3\right]\sin\theta \tag{8.7}$$

应用最小奇性原理(4.5 节)可以取 $k=0$，从而使流函数同速度随 r 尽可能地增长得缓慢些，这就给出

$$\psi \sim C\left[r\log r - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2r}\right]\sin\theta \tag{8.8}$$

上式第二项是均匀平行流，第三项是置于原点的偶极子，而第一项是含涡量的二维"Stokes 子"．但由于无法选择常数 C 以满足上游条件(8.3b)，所以不能求解．同圆球的解不同，现在"Stokes 子"在无穷远处的奇性要比均匀来流更高．所以，远离物体处的速度是无界的，这就是问题的困难所在．

8.3 Stokes 佯谬和 Whitehead 佯谬

绕任意物体无界平面流动的 Stokes 方程无解，这叫 **Stokes 佯谬**. Stokes (1851) 本人把它看作为不存在定常流的一种标志，即从静止开始的物体带走流体的流量将不断增加. 然而，由于下面一节所述的理由，现在可以确信这种解释是不正确的 (参看注 16).

实际上，三维物体也有同样的困难. 只是因为通常三维流的扰动要比二维流弱些，对于有限物体，这些困难要推迟到二阶近似才发生(关于半无限物体，参看习题 8.2). 所以，Whitehead (1889) 想用迭代法改进 Stokes 近似的努力未能成功. 完整的 Navier-Stokes 方程 (Goldstein, 1938, p. 115) 为

$$\frac{1}{R}D^4\psi=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\psi_\theta\frac{\partial}{\partial r}-\psi_r\frac{\partial}{\partial\theta}+2\cot\theta\,\psi_r-2\frac{\psi_\theta}{r}\right)D^2\psi \tag{8.9a}$$

其中

$$D^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{8.9b}$$

把一阶近似式 (8.5) 代入 (8.9a) 右边为 Stokes 略去的对流项，得到迭代方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2\psi=-\frac{9}{4}R\left(\frac{2}{r^2}-\frac{3}{r^3}+\frac{1}{r^5}\right)\sin^2\theta\ \cos\theta \tag{8.10}$$

容易求出满足物面条件(8.3a)的特解是

$$-\frac{3}{32}R\left(2r^2-3r+1-\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\sin^2\theta\cos\theta \tag{8.11}$$

但是此速度在无穷远处的性态不佳，也不能加上任何齐次方程的解可以使解有所改善. 在下一阶近似中，无穷远处的速度为无穷大，这同圆柱绕流一阶近似式(8.8)的情况一样.

均匀来流绕三维物体无界流动的 Stokes 解不存在二阶近似,这叫 Whitehead 佯谬. Whitehead 本人认为，这是在具有尾流死水区的流场中必然会产生间断的一种标志. 然而现在我们知道,这种解释同样也是不正确的(参看注 16).

8.4 Oseen 近似

正如 Prandtl 发现了大 Reynolds 数流动是奇异摄动问题，从而解决了 D'Alembert 佯谬一样，Oseen 指出，Stokes 佯谬和 Whitehead 佯谬是由小 Reynolds 数流动的奇异性质引起的. 大 Reynolds 数时，非一致性区域是物面附近的薄层；而小 Reynolds 数时,非一致性区域则是无穷远点的邻域. 考察一下 Stokes 近似中被略去的项的相对大小,就可以明白问题的症结所在.

从式 (8.10) 右边可见，远离物体处的非线性对流项是 R/r^2 量阶的；由式(8.5)可知，式 (8.10) 左边典型的粘性项——交叉相乘项——为

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\psi$$

$$=\left(\frac{3}{r^3}-\frac{6}{r^5}\right)\sin^2\theta=O\left(\frac{1}{r^3}\right) \tag{8.12}$$

所以，被略去的项同被保留的项的比值为

$$\frac{\text{对流项}}{\text{粘性项}}=O(Rr)\quad(r\to\infty) \tag{8.13}$$

虽然小 Reynolds 数时,这个比值在物体附近是小量. 但不管 R 多小,在离物体充分远处该比值可任意大. 所以,当 Rr 为

一的数量级时，Stokes 近似失效，它发生在 ν/U 量阶的距离处，也就是说，这时粘性长度是重要的特征长度．平面流动有同样的缺陷就更不必说了．圆柱绕流的不完全的 Stokes 近似式(8.8)提示我们可作如下估计：

$$\frac{\text{对流项}}{\text{粘性项}} = O\,(CRr\log r)\ \ (\text{当}\ r\to\infty\text{时}) \tag{8.14}$$

上述这类非一致性是使 Stokes 近似产生奇异性的根源．在三维流中，由于一阶近似的性态足够良好，困难往往没有反映出来，因为在非一致性区域 $Rr = O(1)$ 处，速度实际上已经达到来流的值，所以可以规定上游边界条件．这只是一种例外情况，前面在圆头翼型的内解中也发生过这种情况．(参看 5.6 节)．

Oseen (1910) 解释了 Stokes 和 Whitehead 会遇到困难的原因，同时提出了解决的办法．他不是略去全部对流项，而用其线性形式来近似它，该近似在会出问题的远场处有效．譬如，在笛卡儿坐标系中，x 方向的动量方程为

$$uu_x + vu_y + wu_z + \frac{p_x}{\rho} = \nu(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \tag{8.15}$$

Stokes 把前三项全部略去，而 Oseen 则用 Uu_x 来近似它．平面流的无量纲流函数方程(7.2a)就化成

$$\left(\nabla^2 - R\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi = 0 \tag{8.16}$$

它构成了一类特定的一致有效的方法，并将在 10.2 节进一步讨论．其一般原理是：鉴别出用直接摄动法求解时，略去它们会产生非一致性的项，并在简化时在非一致性区域中尽可能地保留它们．如果所得的方程可以求解，其结果就是(5.4) 节所述的那种一致有效合成展开近似解．

这样一来，Oseen 方程为小 Reynolds 数二维、三维流动

都提供了一致有效的一阶近似．在原则上，我们可以用逐步近似法来改进其解，每一步的结果大概也能保持其一致有效性．但在实际上，Oseen 方程虽是线性的，它们的解却非常复杂以致无法求出其二阶近似．若先把合成解分解成内、外展开式，然后再结合起来，这样做较为简单易行，下一节我们要进行这一项工作．

Oseen 方程有另一种完全不同的解释．在任意 Reynolds 数时，它描述了离有限物体某处的粘性流动，在该处速度已差不多恢复到来流速度的大小．从小扰动观点来看，Oseen 近似已被用来研究物体后的远尾流（习题 8.1，8.3）．在应用时，(8.16) 中的 ψ 通常表示摄动量，而不是完全的流函数．这种差别仅影响边界条件的形式．Oseen 近似的第二种解释在小 Reynolds 数时当然仍然有效，并在下面予以应用．

圆球绕流的 Oseen 方程解由 Oseen (1910) 本人给出

$$\psi = \frac{1}{4}\left(2r^2 + \frac{1}{r}\right)\sin^2\theta - \frac{3}{2}\frac{1}{R}(1 + \cos\theta) \times \left[1 - e^{-\frac{1}{2}Rr(1-\cos\theta)}\right] \tag{8.17}$$

Lamb (1911) 以笛卡儿坐标速度分量的形式给出圆柱绕流的解，譬如垂直于来流的速度分量为

$$-\psi_x = \frac{1}{\log(4/R) - \gamma + \frac{1}{2}}\left\{\frac{\sin 2\theta}{2r^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial y} \times \left[\log Rr + e^{\frac{1}{2}Rr\cos\theta} K_0\left(\frac{1}{2}Rr\right)\right]\right\} \tag{8.18}$$

这里 $\gamma = 0.5772\cdots$ 为 Euler 常数，K_0 是 Bessel 函数（参看注 10）．

上述两个解仅在小 Reynolds 数的基本假定下，近似地满足物面条件的，以后我们要重新导出这些结果．在任意 Rey-

nolds 数时，由 Goldstein (1929)，Tomotika 和 Aoi (1950) 进行求解. 这些较复杂的结果价值不大，因为同 Oseen 本人的观点相反，在大 Reynolds 数时这些结果不仅定量上、而且在定性上均无效. 譬如，Oseen 近似所得的边界层厚度为 R^{-1} 量阶的，而不是 Prandtl 正确理论所导出的 $R^{-1/2}$ 量阶的. 这个矛盾在物理上可理解为，这是由于 Oseen 近似中，在物面上由剪切力引起的涡可以穿透物面而不是沿着物面进行对流的. 要不是 Yamada (1954) 指出，他们的结果在数值上不够准确，从而甚至使小 Reynolds 数时的定性分析也是靠不住的. Tomotika & Aoi 所计算的细致的流谱本来是会有一定实际意义的. 譬如，Tomotika 和 Aoi 预计在无论多小的 Reynolds 数下都会出现如图 8.2 b 所示的定常涡；而 Yamada 证明：用 Oseen 近似计算，在圆柱后面要到 $R = 1.51$ 才开始出现定常涡.

8.5 圆球远场的二阶近似

现在我们用匹配渐近展开法来改进圆球绕流的 Stokes 解. 我们按 Kaplun 和 Lagerstrom (1957) 的思想和更近于 Proudman 和 Pearson (1957) 所使用的符号来进行分析 (参看注 10).

设式(8.5)是小 Reynolds 数时渐近展开式的主项，该渐近展开式叫 Stokes 展开. 我们已经见到，在 r 为 R^{-1} 阶的远场处，该级数展开无效，因此，我们令

$$\rho = Rr \tag{8.19}$$

来引进一个适宜的径向收缩坐标，并设想一个在远场成立的第二渐近展开式. 我们称它为 Oseen 展开，因为远场的流动只是均匀流的小扰动. 按 5.9 节所述的习惯，Oseen 展开是外展开，而 Stokes 展开是内展开. 我们相应地选择符号，由

于径向坐标不能用 R，所以取 ρ 为外变数，取 r 为内变数.

我们可以仿照前面一章的方法，写出两个渐近展开式，其渐近序列是待定的. 不过，我们宁可还是以本问题为例来说明怎样按 5.9 节的标准顺序进行匹配，从而自动确定相继各项的具体形式的.

用 Oseen 变数(8.19)表达 Stokes 解式(8.5)，并对小 R 进行展开得到二项 Oseen 展开：

$$\psi \text{ 的一项 Stokes 展开的二项 Oseen 展开}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{R^2}\rho^2\sin^2\theta-\frac{3}{4}\frac{1}{R}\rho\sin^2\theta \tag{8.20}$$

其中，第一项为均匀来流. 为了能同它相匹配，Oseen 展开式必有如下形式：

$$\psi\sim\frac{1}{2}\frac{1}{R^2}\rho^2\sin^2\theta+\frac{1}{R}\psi_2(\rho,\theta)+\cdots$$
$$(\text{当 } R\to 0,\ \rho \text{ 固定时}) \tag{8.21}$$

将它代入完整的方程(8.9)，得到关于 ψ_2 的经典的线性化 Oseen 方程(8.16)，其形式为

$$\left(\mathscr{D}^2-\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\mathscr{D}^2\psi_2=0 \tag{8.22a}$$

其中

$$\mathscr{D}^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{\sin\theta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{8.22b}$$

令

$$\mathscr{D}^2\psi_2=e^{\frac{1}{2}Rx}\phi_2=e^{\frac{1}{2}\rho\cos\theta}\phi_2 \tag{8.23}$$

把方程(8.22)化成

$$\left(\mathscr{D}^2-\frac{1}{4}\right)\phi_2=0 \tag{8.24}$$

如前一样，欲求 $\phi_2=\sin^2\theta f(\rho)$ 形式的解就可导出

$$f'' - \left(\frac{2}{\rho^2} + \frac{1}{4}\right)f = 0 \tag{8.25}$$

在无穷远处为零的解是

$$f = c_2\left(1 + \frac{2}{\rho}\right)e^{-\frac{1}{2}\rho} \tag{8.26}$$

方程(8.24)具有一定对称性的任何其它解在原点处有更高的奇性，可根据最小奇性原理(5.6 节)因不能匹配而把它们排除在外.

这样一来，关于 ψ_2 的原方程(8.22)就化为

$$\mathscr{D}^2\psi_2 = c_2\left(1 + \frac{2}{\rho}\right)e^{-\frac{1}{2}\rho(1-\cos\theta)}\sin^2\theta \tag{8.27}$$

其特解为

$$\psi_2 = -2c_2(1 + \cos\theta)[1 - e^{-\frac{1}{2}\rho(1-\cos\theta)}] \tag{8.28}$$

式中第一项是置于原点的势源，它同第二项汇相消，以保证通过围住物体的任一曲面的流量为零. 任何别的具有上述性质、使无穷远处速度为零和有一定对称性的齐次方程的解在原点有更高阶的奇性，因此，不能互相匹配.

这是 Oseen 方程的基本解，它描述了任意三维物体在远处产生的扰动场. 常数 c_2 取决于物体附近的流场情况，可用渐近匹配原理式(5.24)来求得. 用 Stokes 变量来表达 Oseen 展开(8.21)，对小 R 进行展开可得

ψ 的二项 Oseen 展开的一项 Stokes 展开

$$= \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta - c_2 r\sin^2\theta \tag{8.29}$$

若 $c_2 = \frac{3}{4}$，上式便可同式(8.20)相匹配.

这样，我们得到了两项的 Oseen 展开式(8.21). 将它再写成 Stokes 变数便为

$$\psi \sim \frac{1}{2} r^2 \sin^2\theta - \frac{3}{2}\frac{1}{R}(1+\cos\theta)\left[1 - e^{-\frac{1}{2}Rr(1-\cos\theta)}\right]$$

$$(R \to 0 \text{ 时}, Rr \text{ 固定}) \qquad (8.30)$$

可以用加法合成法则(5.32)把它同 Stokes 近似 (8.5) 结合起来，构成一致有效的合成展开式，结果是扰动场的一致有效近似解．人们发现，它刚好就是 Oseen 本人给出的 Oseen 方程的解式(8.17)．这就证实了 8.4 节所述的论点，由线性化方程可得出一致有效的一阶近似．在物体附近，式 (8.17) 的最后一项就化成 Stokes 近似中的"Stokes 子"，类似地，它也可称为"Oseen 子"．

8.6 圆球附近的二阶近似

我们着手求 Stokes 展开的第二项．Oseen 展开(8.21)的两项 Stokes 展开为

$$\psi \text{ 的二项 Oseen 展开的二项 Stokes 展开}$$
$$= \frac{1}{4}(2r^2 - 3r)\sin^2\theta + \frac{3}{16}Rr^2(1-\cos\theta)\sin^2\theta \quad (8.31)$$

为了能同它相匹配，Stokes 展开式必须有如下形式：

$$\psi \sim \frac{1}{4}\left(2r^2 - 3r + \frac{1}{r}\right)\sin^2\theta + R\psi_2(r,\theta) + \cdots \quad (8.32)$$

ψ_2 的方程显然就是不含 R 因子的 Whitehead 方程(8.10)．其特解 (8.11) 仍有效．原先的 Stokes 近似(8.5)给出了唯一对称的、且在无穷远处无更高阶奇性的齐次解．这样我们便可取

$$\psi_2 = C_2\left(2r^2 - 3r + \frac{1}{r}\right)\sin^2\theta - \frac{3}{32}$$
$$\times\left(2r^2 - 3r + 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\sin^2\theta\cos\theta \qquad (8.33)$$

其常数 C_2 由匹配来求得．将(8.33)进行 Oseen 展开得

$$\psi\text{的二项 Stokes 展开的二项 Oseen 展开} = \frac{1}{2}\frac{1}{R^2}\rho^2\sin^2\theta + \frac{1}{R}\left(2C_2\rho^2 - \frac{3}{16}\rho^2\cos\theta - \frac{3}{4}\rho\right)\sin^2\theta \tag{8.34}$$

如果 $C_2 = 3/32$，上式便可同(8.31)相匹配．

于是，我们得到圆球附近流函数的两项 Stokes 展开：

$$\psi \sim \frac{1}{4}(r-1)^2\sin^2\theta\left[\left(1+\frac{3}{8}R\right)\left(2+\frac{1}{r}\right) - \frac{3}{8}R\left(2+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta\right] \tag{8.35}$$

它不仅在圆球表面及对称轴上等于零，而且沿着曲面

$$\cos\theta = \left(\frac{8}{3R}+1\right)\frac{2r^2+r}{2r^2+r+1} \tag{8.36}$$

也等于零．上式近似地描述了定常涡的边界，画在图 8.3 中．定常涡要 Reynolds 数大到一定程度时才出现，而这时我们已经不能再认为 Stokes 展开是适用的了．然而，图 8.3 的下半部分告诉我们，上式同 Taneda (1956) 在 $R = 36.6$ 时的实验观测非常一致．涡的后端在

$$r_e = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+3R}-1\right) \tag{8.37}$$

处．因此，当 $R = 8$ 时，在流场中首先开始出现涡．不考虑其具体数值，这个结果同 Taneda 的测量值 12 以及 Jenson(1959) 用完整 Navier-Stokes 方程进行数值计算得到的数值 8.5 符合得很好．实际上，图 8.4 说明，直到 $R = 60$ (大约是可观测到定常流的极限值) 都十分吻合．这些值得令人注意的结果要求进一步考察 Stokes 展开式的以下各项的影响来加以确

证。

继续进行上述的分析可以得到高阶近似. Proudman 和 Pearson (1957) 已进行深入研究，证明了下一阶 Stokes 近似不仅包含 R^2 项，而且还包含 $R^2\log R$ 项 (参看注 10). 因

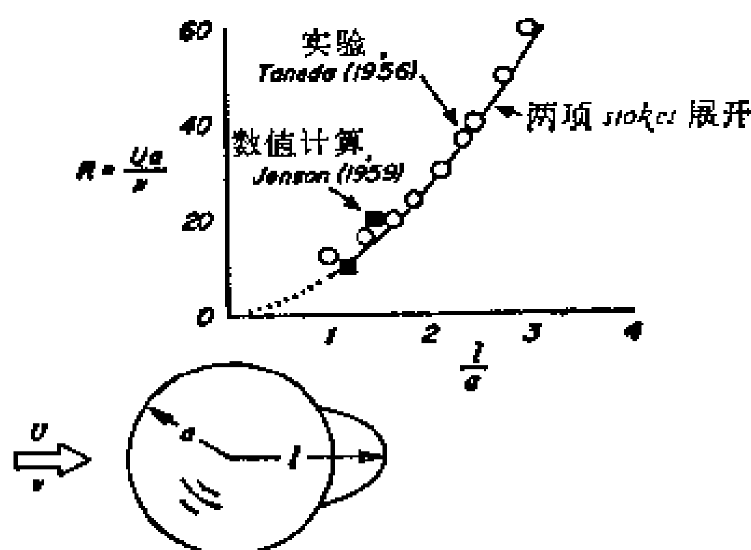


图 8.4 圆球后涡的长度.

此，从 $R^3\log R$ 开始，对数项也出现在 Oseen 展开中. 他们仅计算到 Stokes 展开的 $R^2\log R$ 项，由此可导出第一章的阻力公式 (1.4).

根据他们的结果，开始出现涡的 Reynolds 数是下述超越方程的解：

$$1-\frac{1}{8}R+\frac{9}{40}R^2\log R+O(R^2)=0 \qquad (8.38)$$

遗憾的是，若只保留三项，上述方程没有实根. 对数项限制了 Stokes 展开式只能适用于 R 比 1 小的值. 要到找到某种扩大这类级数适用范围的方法以后 (10.7 节)，我们才能说二阶 Stokes 近似令人惊异的预测究竟是否一种巧合.

由于对称性，式(8.35)方括号中的第二项对阻力没有贡

献. 因此，接第一项计算的阻力为$\left(1+\frac{3}{8}R\right)$乘以 Stokes 公式的值. 但是，第二项是非线性项的 Whitehead 特解. 因此，在物体附近忽略了非线性项的 Oseen 近似，对于对称物体至少给出了准确到二阶的阻力 (Chester，1962).

8.7 圆柱的高阶近似

因为平面流的 Stokes 佯谬比三维流的 Whitehead 佯谬更突出，因此，用匹配渐近展开法来解决 Stokes 佯谬(尽管它还有解不能求到高精度这一步的实际缺陷)要更令人注目些. 我们综合 Kaplun (1957) 和 Proudmann (1957) 的工作来论述关于圆柱绕流这一典型例子(参看注 10).

分析的方法同圆球绕流大致相同，但存在一些有意思的差别. 尤其是因为匹配刚刚够格，所以渐近序列收敛缓慢. Kaplun 和 Lagerstrom (1957) 就是针对这个问题提出了复杂的中间极限、中间展开和中间匹配原理 (5.8 节) 这一套办法的. 不过我们将会看到，虽然简单的极限匹配原理 (5.22) 不适用，但渐近匹配原理(5.24)是完全足够的.

我们再来研究 Stokes 展开的第一项、双调和方程的解 (8.8):

$$\psi\sim\Delta_1(R)\left(r\log r-\frac{1}{2}r+\frac{1}{2r}\right)\sin\theta$$

$$(\text{当 } R\to 0,r \text{ 固定时}) \qquad (8.39)$$

必须允许因子 Δ_1 依赖于 Reynolds 数，因为我们的渐近序列是待定的. 虽然上述近似不能满足无穷远处均匀流的条件 (8.3b)，但它能同作为 Oseen 展开的第一项同均匀流相匹配 (Lagerstrom 和 Cole，1955，6.3 节). Oseen 变数还是取为 $\rho=Rr$，所以不是以半径 a，而是以粘性长度 ν/U 为特征

长度，那么，Oseen 近似由如下形式的均匀来流开始：

$$\psi \sim \frac{1}{R}\rho\sin\theta + \cdots \ (R \to 0, \rho > 0 \text{ 且固定}) \tag{8.40}$$

将 Stokes 近似(8.39)以 Oseen 变数来表达，并进行展开得到

ψ 的一项 Stokes 展开的一项 Oseen 展开

$$= \frac{\Delta_1(R)}{R}\log\frac{1}{R}\ \rho\sin\theta \tag{8.41}$$

若 $\Delta_1(R) = \left(\log\frac{1}{R}\right)^{-1}$; 或更一般地 $\Delta_1(R) = (\log 1/R + k)^{-1}$，它将同(8.40)相匹配．其中 k 为任意常数，下面我们要利用这个自由度．

在这一情形重迭区很小，以致为了要进行匹配必须允许有 Δ_1 阶的误差，它与圆球 Stokes 近似的 R 阶误差相比是很大的．因此，我们要进行以 Δ_1 幂的慢展开，无数这样的项仅相应于圆球的第一项．

进一步以 Oseen 变数展开 Stokes 近似(8.39)得到

ψ 的一项 Stokes 展开的二项 Oseen 展开

$$= \frac{1}{R}\left[1 + \Delta_1(R)\left(\log\rho - k - \frac{1}{2}\right)\right]\rho\sin\theta \tag{8.42}$$

为了能进行匹配，要求 Oseen 展开式(8.40)按下式那样继续进行展开：

$$\psi \sim \frac{1}{R}\left[\rho\sin\theta + \Delta_1(R)\Phi_2(\rho,\theta) + \cdots\right] \tag{8.43}$$

将它代入完整的方程(7.2a)，自然证明了 Φ_2 满足线性化的 Oseen 方程(8.16)．象圆球的情况一样，可以求出适当的解(Proudman 和 Pearson，1957)．但在这里，采用流函数求解没有好处，因为它只能表示成无穷级数，而速度分量有封闭形式的表达式．

我们显然要求出平面流对应于式(8.28)的表达式，而

Oseen 子代表了在原点有无限小阻力产生的扰动. Oseen 所获得的基本解 (Rosenhead, 1963, p. 183) 以笛卡儿坐标的速度分量来表达:

$$u_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial(\rho\sin\theta)} = 2c_2\left\{\frac{\partial}{\partial(\rho\cos\theta)}\left[\log\rho + e^{\frac{1}{2}\rho\cos\theta}K_0\left(\frac{\rho}{2}\right)\right]\right.$$

$$\left. - e^{-\frac{1}{2}\rho\cos\theta}K_0\left(\frac{1}{2}\rho\right)\right\} \tag{8.44a}$$

$$v_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial(\rho\cos\theta)} = 2c_2\frac{\partial}{\partial(\rho\sin\theta)}\left[\log\rho\right.$$

$$\left. + e^{\frac{1}{2}\rho\cos\theta}K_0\left(\frac{\rho}{2}\right)\right] \tag{8.44b}$$

$\log\rho$ 项还是在原点的势源, 它同与 Bessel 函数 K_0 有关的汇相抵消. 对于小 ρ, 有如下近似:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial(\rho\sin\theta)} \sim -c_2\left(\log\frac{4}{\rho} - \gamma + \cos^2\theta\right) + O(\rho\log\rho) \tag{8.45a}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial(\rho\cos\theta)} \sim c_2\sin\theta\cos\theta + O(\rho\log\rho) \tag{8.45b}$$

其中, $\gamma = 0.5772\cdots$为 Euler 常数,对上式积分得

$$\phi_2 \sim -c_2\left(\log\frac{4}{\rho} + 1 - \gamma\right)\rho\sin\theta + O(\rho^2\log\rho) \tag{8.46}$$

利用上式, 我们得知 Oseen 展开式(8.43)在物面附近的性态为

ϕ 的二项 Oseen 展开的一项 Stokes 展开

$$= \frac{1}{R}\left[\rho\sin\theta + c_2\Delta_1(R)\left(\log\frac{\rho}{4} + \gamma - 1\right)\rho\sin\theta\right] \tag{8.47}$$

再按渐近匹配原理同式(8.42)匹配导出 $c_2 = 1$.

Stokes 展开的第二项——实际上, 所有有限阶的项——

显然还是双调和方程的解，因为 R 阶的非线性项相对于 $\Delta_1(R)$ 幂次方的尺度来说是超越小的．应用匹配或最小奇性原理表明，每项就是一阶近似(8.8)乘以一个常数因子．按 Kaplun (1957)的方法，选择常数 k 使式(8.42)，(8.47) 完全匹配，即 $k = \log 4 - \gamma + \frac{1}{2}$，从而使第二项等于零较为方便．这时，Stokes 展开式有如下形式：

$$\psi \sim \left(\Delta_1 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n \Delta_1^n\right)\left(r \log r - \frac{1}{2} r + \frac{1}{2r}\right) \sin\theta \quad (8.48a)$$

式中

$$\Delta_1 = \left(\log \frac{4}{R} - \gamma + \frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\log \frac{3.703}{R}\right)^{-1} \quad (8.48b)$$

由式(8.43)(8.48)进行加法合成，构成一致有效的二项合成展开，又得出了线性化 Oseen 方程的 Lamb 解(8.18)．

Kaplun (1957) 将上述过程再进行一次循环，求出 Stokes 展开(8.48)第三项的系数为 $a_3 \approx -0.87$．因此，他求出的阻力系数为

$$C_D = \frac{D}{\rho U^2 a} \sim \frac{4\pi}{R}\left[\Delta_1(R) - 0.87\Delta_1^3(R) + O(\Delta_1^4)\right] \quad (8.49)$$

上式中的第一项为 Lamb (1911, 1932) 的经典结果．在图 8.5中，同 Tritton (1959) 的测量数据进行了比较，说明上述结果适用范围有限．为了进行对比，还图示了由 Tomotika 和 Aoi (1950) 计算的线性 Oseen 方程(8.16)的完整数值解．

从正规的数学观点来看，我们必须先算出式(8.48)中 Δ_1 的所有幂次项，然后才能考虑 Stokes 方程的非线性修正，因为其量阶 R 相对说来是超越小的(参看注 11)．但实际上，这类项是重要的．其第一项是 R 阶的(习题 8.5)，当 $R > 0.00008$ 时，它比 Δ_1^4 还要大．Proudman 和 Pearson (1957)简单讨论

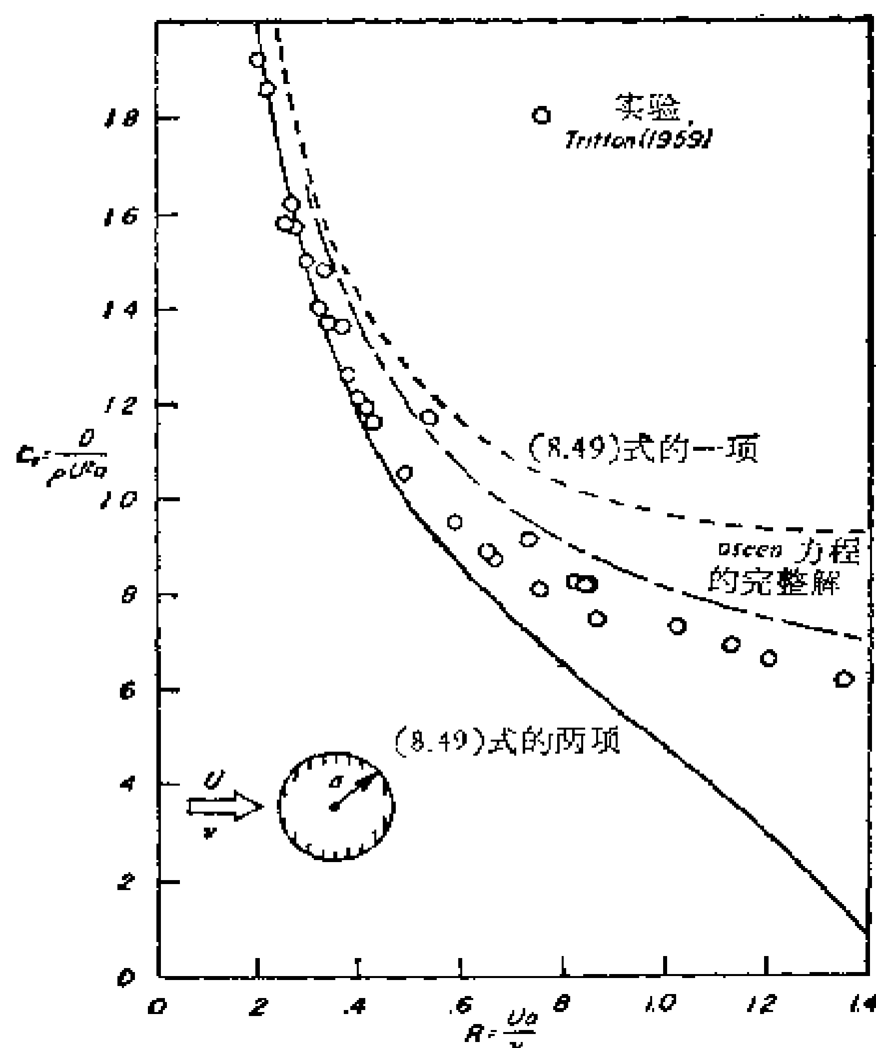


图 8.5 小 Reynolds 数时圆柱的阻力.

了怎样来计算这类项. 为了说明流谱的非对称性(譬如定常涡的出现),就需要用这些项.

习　　题

8.1 平板和二维尾流的 Oseen 解. 在抛物坐标系(7.51)中, 平面流动流函数的 Navier-Stokes 方程为

$$\left[\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)+\psi_\xi\frac{\partial}{\partial\eta}-\psi_\eta\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\frac{\psi_{\xi\xi}+\psi_{\eta\eta}}{\xi^2+\eta^2}=0$$

试导出相应的 Oseen 线性化方程(8.16). 用分离变量法求均匀来流中半无限平板以及远离无升力有限物体的 Oseen 解. 证明在第一种情形, 抛物坐标下的边界层近似就是完整的 Oseen 解; 在第二种情形, 试

用物体阻力来表达代表尾流和位势流项前面的常数因子，并将解同式(8.44)联系起来［第一种情形原先由 Lewis 和 Carrier (1949) 用较复杂的方法处理过；关于第二种情形，请参看 Imai (1951) 和 Chang (1961)］.

8.2 绕细长抛物面的粘性流动. 在抛物坐标系中(参看习题 8.1)，轴对称流的 Navier-Stokes 方程为

$$\left[\nu(\xi^2+\eta^2)D^2+\frac{1}{\xi\eta}\left(\psi_\xi\frac{\partial}{\partial\eta}-\psi_\eta\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{2}{\xi^2\eta^2}(\eta\psi_\xi-\xi\psi_\xi)\right]D^2\psi=0$$

式中

$$D^2=\frac{\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right]$$

试求旋转抛物面绕流的 Stokes 解。证明它象圆柱一样可以同样勉强够格的方式同均匀来流相匹配. 计算 Oseen 展开的第二项，并说明此过程应如何进行下去. 由此可对已知的椭圆抛物面 Oseen 近似的精确度得出什么结论 (Wilkinson, 1955)? 怎样将由 Oseen 近似得到的摩擦阻力同压差阻力之比同圆柱的值 1:1 和圆球的值 2:1 相比较(Tomotika 及 Aoi, 1950)(参看注 3)?

8.3 轴对称物体的尾流. 试计算在粘性流中，远离有限旋成体处流函数展开式的主项. 象在习题 8.1 中那样，用物体的阻力来确定常数(参看注 3).

8.4 绕薄抛物柱的粘性流动. 试证抛物柱的 Stokes 近似无论如何不能同均匀流相匹配，说明它好象可以同平板的 Oseen 近似匹配到一阶，同抛物柱的 Oseen 近似匹配到二阶；但继续用匹配渐近法求解表明，其中哪一个都不是正确的主项. 试问，真正的 Oseen 极限是什么(参看 Lagerstrom 和 Cole 1955, p. 877)?

8.5 圆柱的超越小项. 假定 (8.48a) 的各阶近似都是已知的，试确定次项的形式(除去待定常数外)，并证明它是 R 量阶的. 试问，它同 Oseen 展开的哪一项相匹配(参看注 3)?

8.6 变形坐标法的新结果. 如果我们已知在下游对称轴上变形为零，试证：可用变形坐标法获得二项 Stokes 展开式 (8.35)，且只要变形半径即可.

第九章　无粘性奇异摄动问题

9.1　引言

如第五、第六章所述，为了处理粘性流动理论中的奇异摄动问题，人们提出了匹配渐近展开法；Lighthill 的变形坐标法，则是为了解决波的传播问题而发展起来的。至于 Lighthill 方法是否能加以推广，使它不仅能处理双曲型方程，而且也能处理椭圆型和抛物型方程，这个问题还不太清楚。另一方面，匹配渐近展开法已经被成功地应用于很多无粘性流动问题。事实上，在第四章论述无粘性薄翼理论时，我们采用了这种方法，并在 6.7 节把它应用于求解超声速流的双曲型方程。

本章阐述无粘性流动另外三个非一致有效的例子。这三个例子包括了从亚声速、跨声速到高超声速整个速度范围。第一个例子是经典的 Prandtl 升力线理论。只要它的奇异性被揭示以后，就可以用新的见解来认识这一理论。第二个例子是来流速度略微超过声速时，绕细长锥的流动。为了确定激波的位置，线性化解必须加以改进。第三个例子是高超声速流中小钝头楔产生的熵层。我们用匹配渐近展开法处理第一、第三个问题，对第二个问题则采用变形坐标法。然而，上述每个例子是否还用别的方法求解过，提出这个问题是颇有裨益的。

9.2　大展弦比升力机翼

预测亚声速流中的有限升力机翼产生的流场，是空气动

力学理论中最棘手的问题之一．粘性除了在规定尾缘处的 Kutta-Joukowski 条件这一点起作用外，必须予以忽略．线性化的步骤很必要，这样便可把厚度、弯度和攻角效应分别进行讨论。按照 Göthert 法则 (Johes 和 Cohen 1960, p. 49)，亚声速流问题是同不可压缩流问题等价的．留待解决的是无粘性、不可压缩来流在无限小攻角下绕零厚度机翼的流动，即便如此，这个问题也很复杂．用升力面理论来进行严格处理需要解含有双重积分的奇异积分方程．

对于大展弦比机翼，Prandtl 升力线理论把问题简化成求解只含单重积分的奇异积分方程．但人们还不知道怎样来改进 Prandtl 的分析以得到较准确的近似公式．例如，对于展弦比为 A 的平板椭圆机翼，众所周知的升力曲线斜率公式

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{2\pi}{1 + (2/A)} \tag{9.1a}$$

在一定近似程度上可以表达为

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = 2\pi\left(1 - \frac{2}{A} + \cdots\right) \tag{9.1b}$$

然而，不能推广 Prandtl 的方法来求次项．下面我们将会看到，该次项并不是 A^{-2} 量阶的．

Friedrichs (1953) 指出：这个问题是奇异摄动问题．它包含两个特征长度，翼展是主参考长度，弦长是副参考长度，当展弦比增加时，它们的比值趋于无限．因此，按照我们的物理判据(5.3 节)，这个参数摄动问题可能有奇异性．对于升力机翼(以及对无升力机翼，参看习题 9.1)，可能性变成了现实．可以用匹配渐近展开法来处理这种非一致性．我们发现，二阶近似等价于 Prandtl 升力线理论．但是可以看到，应用匹配原理就不会导出积分方程，因为它化成了求积问题，从而使分析得到很大简化．继续进行这一过程，就可进一步计算高

阶近似。

为简单起见，考虑零厚度的平板机翼，其平面形状沿流动方向和翼展方向都是对称的(图 9.1a)。取来流速度和半翼展长为速度和长度单位。置机翼于 $y=0$ 平面上，这样就不必转换相切条件了。来流同机翼平面的倾角为 α。于是，可用 $x=\pm A^{-1}h(z)$ 来描述机翼平面形状，其中 A 是展弦比，半弦长 $h(z)$ 是量级为一的解析函数。我们先假定它在 $z=\pm 1$ 处任意光滑地趋于零，以避免在翼梢处的非一致性。以后，我们还要研究放弃这个限制所带来的影响。

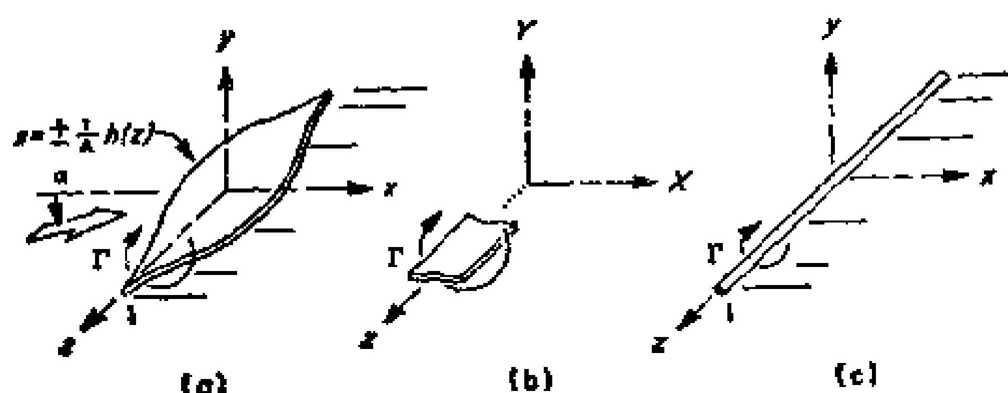


图 9.1 平板升力机翼的内外极限。(a) 完整问题，(b) 内极限，(c) 外极限。

关于无量纲速度势 ϕ，问题的完整提法是

方程： $\nabla^2\phi\equiv\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz}=0$ (9.2a)

切向条件：$\phi_y=0$(在 $y=0$，$|x|<A^{-1}h(z)$上) (9.2b)

上游条件：$\phi\sim x\cos\alpha+y\sin\alpha$ (9.2c)

Kutta 条件：$\phi_x<\infty$ (在 $y=0$，$x=A^{-1}h(z)$上)(9.2d)

这里给出的 Kutta 条件的形式是，简单地满足在尾缘处速度为有限这一物理要求。

当展弦比 A 趋于无穷时，在任一展向截面中的流动趋近于绕过具有当地弦长的平板的平面流动(图 9.1b)，这在物理上是很明显的。可以引进放大的内变量形式地证明这一点，在

机翼附近，内变量的量级为一．令

$$\phi = A^{-1}\Phi(X, Y, z) \tag{9.3a}$$

其中

$$X = Ax \tag{9.3b}$$

$$Y = Ay \tag{9.3c}$$

这些坐标的参考长度不是半翼展长，而是典型的弦长．这里，典型弦长是指垂直于展向的截面的有关长度尺度．

上述步骤把整个问题(9.2)变换成

$$\Phi_{XX} + \Phi_{YY} + A^{-2}\Phi_{zz} = 0 \tag{9.4a}$$

$$\Phi_Y = 0 (\text{在 } Y = 0,\ |X| < h(z) \text{上}) \tag{9.4b}$$

$$\Phi \sim X\cos\alpha + Y\sin\alpha\ (\text{在上游}) \tag{9.4c}$$

$$\Phi_X < \infty\ (\text{在 } Y = 0, X = h(z) \text{上}) \tag{9.4d}$$

当 $A = \infty$ 时，这个问题的解为

$$\Phi_1 = X\cos\alpha + \mathrm{Im}\{\sqrt{(X + iY)^2 - h^2(z)} - h(z)\log[X + iY + \sqrt{(X + iY)^2 - h^2(z)}]\} \times \sin\alpha \tag{9.5}$$

若采用椭圆坐标，上式可表达成实数形式．这是在攻角 α 下，绕弦长为 $2h(z)$ 的平板的平面流动的解(图 9.1b)，结果显然应该如此．所以，准确到一阶近似，展向坐标 z 仅起参数作用．我们的目的只是要从上述解得到环量 Γ，它等于 $2\pi i$ 乘以 ϕ 中 $\log(x^2 + y^2)^{1/2}$ 项的系数：

$$\Gamma \sim \Gamma_\infty \equiv 2\pi\alpha A^{-1}h(z) \tag{9.6}$$

从(9.4a)式可见，一阶近似的相对误差在机翼附近看来是 A^{-2} 量级的．然而，我们不能直接用迭代法求二阶近似．从式(9.5)计算 Φ_{zz} 得到的表达式在远离翼型处具有 $\tan^{-1}Y/X$ 的性态，它相应于一种环流．因此，迭代方程特解的性态与 $X^2 + Y^2$ 相同，以内变数表达时，在距离的量级为 A 处，它将

超过均匀流的量级．这种发散性类似于 Whitehead 试图改进绕圆球的 Stokes 流动时所遇到的情况（8.3 节），它是奇异摄动问题的一种标志．下节我们要构造一个辅助的外解来处理这个问题．可以看到，匹配将迫使相对量级为 A^{-1} 的项出现在内展开中，这同边界层理论的情况是类似的（7.3 节）．

9.3 升力线理论的匹配渐近展开法

在取外极限时（图 9.1c），机翼缩成一根奇线，该奇线必须是（9.2a）的解．第一种可能性是涡，它关于 y 具有一定对称性．在这一步必须丢弃高阶多极子，因为按最小奇性原理，可以证明它们不能匹配．当 $A\to\infty$ 时，涡强度 Γ 显然为零，因此可以暂且展开成如下形式试试：

$$\Gamma(z;A)\sim A^{-1}\gamma_2(z)+A^{-2}\gamma_3(z)+\cdots \tag{9.7}$$

在机翼上的附着涡必须变成自由涡顺流而下，一直伸展到无穷远处．小攻角假设是一个很大的简化，这时只要保留 α 的线性项就可以了．还有，必须取尾涡平行于 x 轴（图 9.1c）．这种涡系的势，很容易用 Biot-Savart 定律进行计算．所以，求出外展开的形式为

$$\phi\sim(x+\alpha y)+\frac{1}{4\pi}A^{-1}\int_{-1}^{1}\frac{y\gamma_2(\zeta)}{y^2+(z-\zeta)^2}\times\left[1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\zeta)^2}}\right]d\zeta$$

$$(x,\ y,\ z\ \text{固定},\ A\to\infty\ \text{时}) \tag{9.8}$$

这一步同经典的 Prandtl 升力线理论有本质的区别，从而使问题得到了很大简化．Prandtl 用求解积分方程的方法来得到环量 $\gamma_2(z)$ 的分布；然而，在与 Prandtl 理论相同的精确程度上，环量直接可以用同内解相匹配的方法来加以确定．可以形式上这样来做．其结果显然是由如下的事实导出

的，即包围着相同涡线的曲线具有相同的环量(图 9.1)．取内极限时，环量由式(9.6)确定．因为它同环路的大小无关，将它同式(9.7)相匹配，得出

$$\gamma_1(z) = 2\pi\alpha h(z) \tag{9.9}$$

这就是说，附着涡的一阶近似具有在实际攻角下，绕过当地弦长的平板的平面流动的环量．在 Prandtl 理论中，环量是对"有效"攻角而言的，但两者之差是高阶小量．这样一来，两项外展开式(9.8)为

$$\phi \sim x + \alpha y + \frac{1}{2}\alpha A^{-1}\int_{-1}^{1} \frac{yh(\zeta)}{y^2 + (z-\zeta)^2}$$

$$\left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}}\right]d\zeta \tag{9.10a}$$

现在，我们来讨论内问题，并求二阶近似．在把式(9.10a)进行内展开时，首先用分部积分以免导致无意义的发散积分，

$$\phi \sim x + \alpha y - \frac{1}{2}\alpha A^{-1}\int_{-1}^{1} h'(\zeta)\left[\tan^{-1}\frac{y}{z-\zeta}\right.$$

$$\left. + \tan^{-1}\frac{y}{x}\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}}{z-\zeta}\right]d\zeta \tag{9.10b}$$

然后，引进内变数(9.3)，对大 A 进行展开，得到 ϕ 的二项外展开的二项内展开：

$$\phi \text{ 二项外展开的二项内展开} = A^{-1}\left[X + \alpha Y - \alpha h(z)\tan^{-1}\frac{Y}{X}\right]$$

$$-\frac{1}{2}\alpha A^{-2}Y\oint_{-1}^{1}\frac{h'(\zeta)d\zeta}{z-\zeta} \tag{9.11}$$

上述积分必须理解为 Cauchy 积分主值．很明显，这就是第四章研究对称薄翼时遇到的积分式(4.10)．它也出现在包括细长体理论在内的流体力学其它分支中．

式(9.11)的第一项已经同内解(9.5)式相匹配了，第二项

要求修正相对阶次 A^{-1},使内解(9.3a)的展开式为

$$\phi \sim A^{-1}\Phi_1(X, Y, z) + A^{-2}\Phi_2(X, Y, z) + \cdots$$
$$(\text{当 } X, Y, z \text{ 固定}, A \to \infty \text{ 时}) \tag{9.12}$$

把它代入完全的方程(9.2a)表明,Φ_2 与 Φ_1 都要满足 X, Y 的二维 Laplace 方程. 因此,式(9.11)说明,Φ_2 就是直接把局部平板解的攻角从几何值 α 化成有效值

$$\alpha_e(z) = \alpha\left[1 - \frac{1}{2}A^{-1}\oint_{-1}^{1}\frac{h'(\zeta)d\zeta}{z-\zeta}\right] \tag{9.13}$$

的结果而已. 这是由升力线理论得到的,大家所熟知的结果,尾涡系在机翼附近形成一个下洗速度,它在每个展向截面中为常数,从而起了减小该截面的表观攻角的作用. 但是,在这里由于我们认识到 A 很大时,下洗角同几何攻角 α 相比是小量,便把计算简化成求积问题;而经典的升力线理论由于没有利用上述事实,问题被归结成解积分方程. 可以作为用迭代法解 Prandtl 积分方程的第二步,导出我们的结果.

对于内解,我们只使用了环量和攻角的关系式(9.6),它等价于二维升力线的斜率. Prandtl 建议用计及厚度和粘性效应的实验值来代替理论值. 正如5.4节曾提到过的,即使内问题没有分析解,只能采用数值方法或实验手段,匹配渐近展开法也能应用,这就是一个实例.

9.4 三阶近似概述

上述的分析过程再周而复始地继续一次,就获得了三阶近似 (Van Dyke, 1964b). 这里,我们阐述它的重要特性.

由前面的物理论证推断,二项内展开的三项外展开给出了涡强度(9.7)的修正值 γ_3. 此外,它表明在这一步次一高阶奇性项将出现在升力线理论中. 虽然它是具有垂直轴的偶极子,我们还是称它为涡偶极子 (divortex),以强调涡沿着 x 方

向导数(代表机翼上分布涡的一次矩)的物理意义．所以，三阶外展开是式(9.10)，其中 h 由因子(9.13)加上下式进行修正：

$$\frac{1}{4}\alpha A^{-2}\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial z}\int_{-1}^{1}h^2(\zeta)\frac{(z-\zeta)d\zeta}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\zeta)^2}} \quad (9.14)$$

分部积分后，可以计算它的三项内展开．奇怪的是，我们发现在内展开(9.12)预期的次一 A^{-3} 阶项以前，还有一 $A^{-3}\log A$ 量级的项．对数项通常是两项中较易计算的项(参看10.5节)，它要求进一步改变有效攻角(9.13)，并使因尾涡系引起的翼面附近的流线曲率减小(图9.2)．

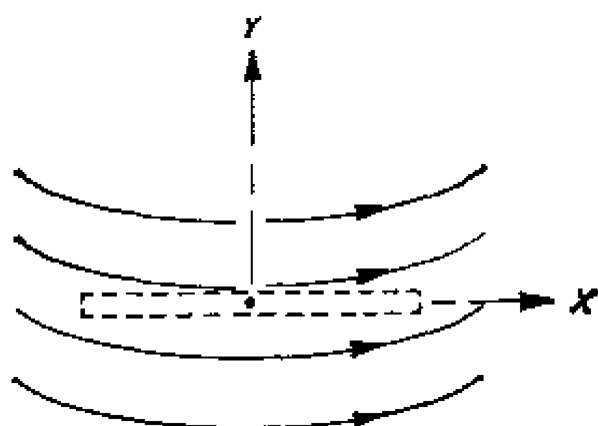


图 9.2 尾涡系在机翼附近引起的流线曲率．

非对数项同某种较复杂的局部流动有关，它们均可用复变函数论的方法求得．于是各项中 $\log(x^2+y^2)^{1/2}$ 前的系数，确定了环量或展向升力分布，我们求得为

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty} = 1 &- \frac{1}{2}A^{-1}\oint_{-1}^{1}\frac{h'(\zeta)d\zeta}{z-\zeta} + \frac{1}{4}A^{-2}\log A\,(2h'^2+3hh'') \\ &+ \frac{1}{4}A^{-2}\Big\{\Big(2\log\frac{4}{h}-\frac{3}{2}\Big)h'^2 + \Big(3\log\frac{4}{h}+\frac{1}{2}\Big)hh'' \\ &- 2\frac{d}{dz}\oint_{-1}^{1}\frac{[\alpha_e(\zeta)/\alpha-1]Ah(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta \\ &+ \frac{1}{2}\frac{d^3}{dz^3}\oint_{-1}^{1}h(\zeta)[h(z)+h(\zeta)]\mathrm{sgn}(z-\zeta)\log|z \\ &-\zeta|d\zeta\Big\} + \cdots \end{aligned} \quad (9.15)$$

其中，Γ_∞ 是二维流的环量(9.6)，α_e 由式(9.13)确定．于是，

按照 Kutta-Joukowski 定律，升力曲线的斜率为

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = 2\pi \int_0^1 h(z)\,\frac{\Gamma(z)}{\Gamma_\infty(z)}\,dz \tag{9.16}$$

9.5 应用于椭圆机翼

展弦比为 A 的椭圆机翼(图 9.3)，其半弦长为

$$h(z) = \frac{4}{\pi}\sqrt{1 - z^2} \tag{9.17}$$

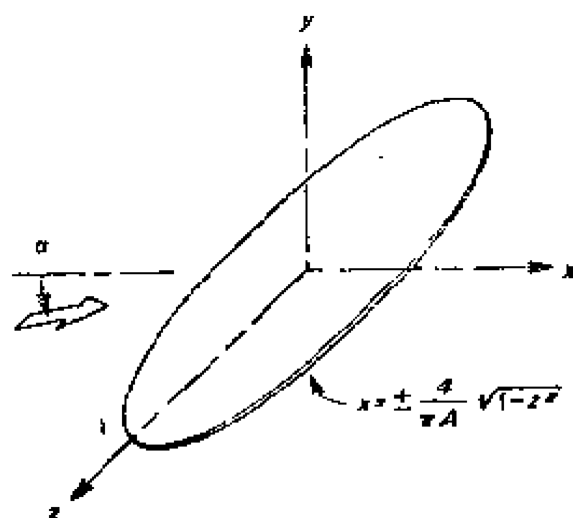


图 9.3 平面椭圆机翼.

由式(9.15)可以求出环量为(参看注 13)

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty} = 1 - \frac{2}{A} - \frac{4}{\pi^2}\,\frac{\log A}{A^2}\,\frac{3 - 2z^2}{1 - z^2} + \frac{4}{\pi^2}\,\frac{1}{A^2}\Big[\frac{5}{2} + z^2 - \log(1 - z^2) + \frac{\log 2}{1 - z^2} - \frac{3 - 2z^2}{1 - z^2} \times \log\frac{\pi}{\sqrt{1 - z^2}}\Big] + \cdots \tag{9.18}$$

根据式(9.16)，沿着展向积分上式，就得到第一章里所引用的升力曲线斜率式(1.6)．前面二项就是我们原先对于Prandtl 结果(9.1a)的修正式(9.1b)．

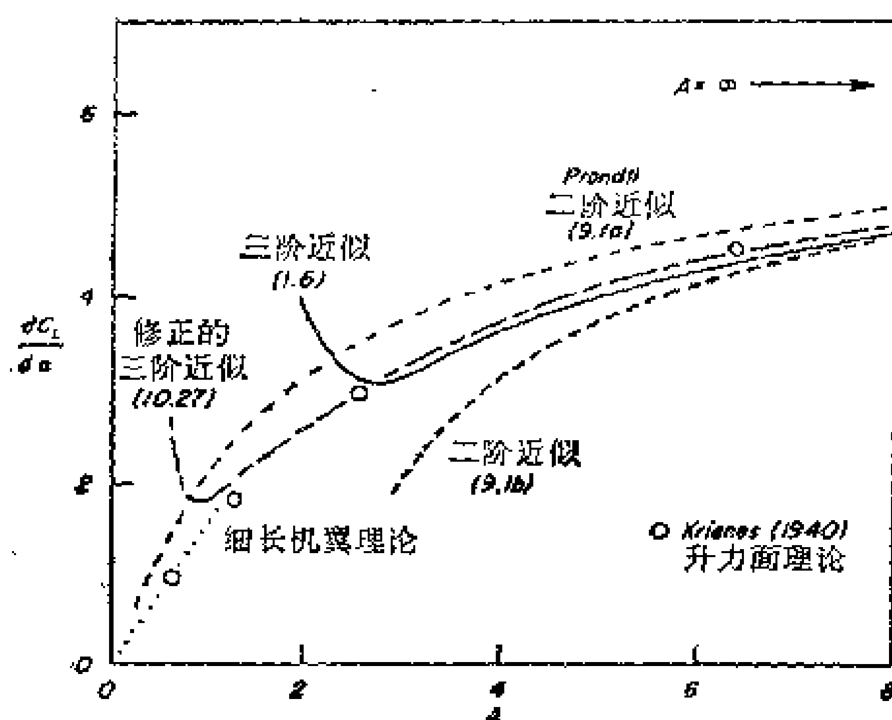


图 9.4 椭圆机翼的升力曲线斜率.

幸而，它是已经算出升力面解的少数几种情形之一．图 9.4 说明了 Prandtl 解虽然是用细长机翼理论获得的正确值的两倍，但在 $A=0$ 时等于零，这是它的优点；而展开式(9.1b)，实际上当 A 超过 4 时才比较准确．我们看到，三阶近似当 A 小于 3 时是发散的．如图 9.4 上点划线所示，以后在 10.7 节中要讨论怎样来推迟这种突变现象．

我们已经违反了关于不能采用尖翼梢的限制．正如把薄翼理论应用于圆头情形(4.4 节)，或把边界层理论应用于尖头前缘(第七章)一样，所得到的结果也是局部失效的．我们看到，当 $1\pm z$ 是 A^{-2} 量级时，式(9.18)不成立．在离开机翼平面翼梢数个半径的距离处，不管展弦比多大，流动不是二维的．在这个区域内，显然还要另一个渐近解．其首项代表了绕抛物平面形半无限平板的流动(图 9.5)，并适用于任何局线为解析曲线的平板机翼的翼梢附近．对于这个翼梢解，原先的坐标都放大了一个 A^2 的因子．

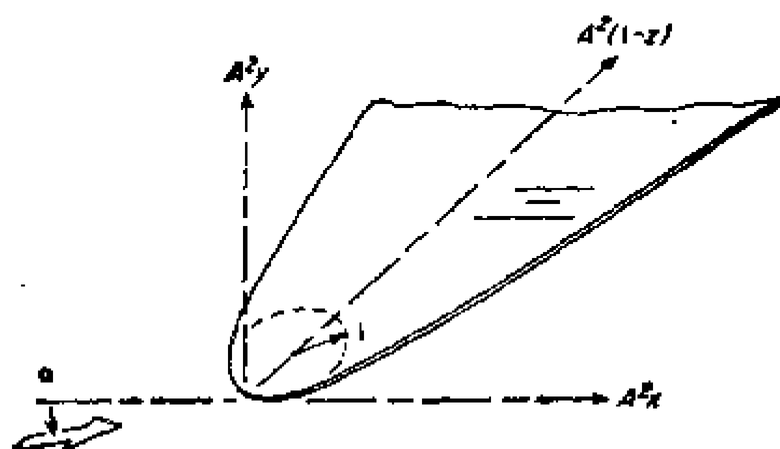


图 9.5　圆翼梢附近的极限问题.

在这个复杂的问题中，还存在着别的非一致性. 大家知道，涡片往往要翻卷起来，这就使外解在 x 为 A/α 量级的远下游处失效. 还有，对于翼型不同于平板的机翼，内问题通常要用薄翼理论来处理. 如第四章所述，这就会导致在前缘和尾缘处的非一致性，以及在翼梢处更复杂的情况. 在后掠机翼的翼身交接处或机翼平面形状的其它不连续处，在偏转的副翼附近等等，也会发生非一致性. Thurber (1961) 用匹配渐近展开法，分析了光滑的月牙形后掠机翼的情形. 他发现这时对数项出现在二阶近似中 (参看注 13).

9.6　绕细长圆锥的低超声速流动

对于超声速流中的细长机体，众所周知的细长体理论(例如 Ward, 1955) 丝毫没有提供有关头激波强度的数据，只有在保留了某些非线性项，并认识到摄动解的奇异性质以后，才能求出结果. 这个问题已经用变形坐标法 (Lighthill, 1949 b) 和匹配渐近展开法 (Bulakh, 1961) 予以处理. 我们应用前一种方法于这样一个简单问题，从而使我们能比原先的结果更前进一步.

我们来考虑一个半顶角为 ε 的细长圆锥，攻角为零，置于

超声速流中，其速度要达到使流场为锥型流的大小(图 9.6).

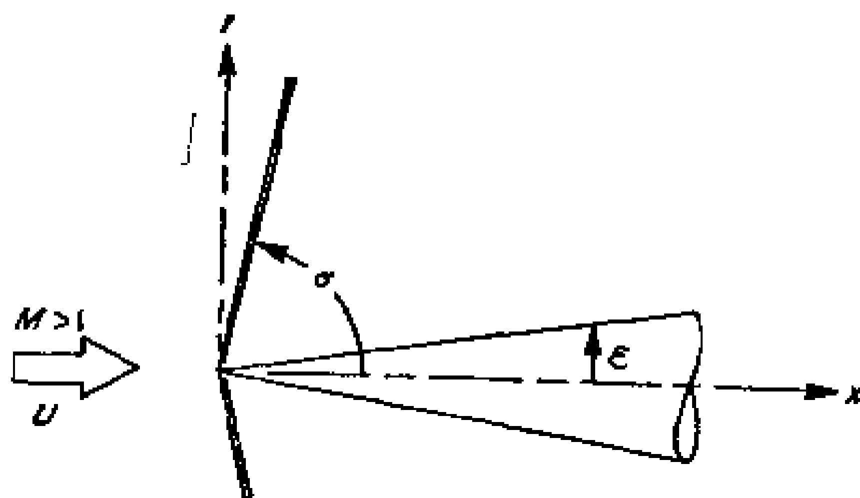


图 9.6 绕细长锥的低超声速流动.

如果流动只是低超声速的，主要的现象由以下跨声速小扰动方程来描述 (Oswatitsch 和 Berndt, 1950):

$$\varphi_{rr}+\frac{\varphi_r}{r}-(M^2-1)\varphi_{xx}=(\gamma+1)\varphi_x\varphi_{xx} \qquad (9.19a)$$

这里，φ 是扰动速度势，所以，速度向量为 $U_{\text{grad}}(x+\varphi)$。在这阶近似中，相切条件可以线性化。由于物体是光滑的，该条件还可被转移到轴上(3.8 节)，即

$$\lim_{r\to 0} r\varphi_r=\varepsilon^2 x \qquad (9.19b)$$

斜激波关系提供了确定头激波待定位置的两个条件:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi=0 &(9.19c)\\ &-\varphi_x=\frac{2}{\gamma+1}\,\frac{M^2\sin^2\sigma-1}{M^2} &(9.19d)\end{aligned}\right\}\left(\text{在 }\frac{r}{x}=\tan\sigma\text{ 上}\right)$$

在锥面上的压力系数由下式确定:

$$C_p=-2\varphi_x-\varepsilon^2 \qquad (9.20)$$

Oswatisch 和 Sjödin (1954) 已经用数值方法解决了这个问题，我们则用解析方法求小 ε 的渐近展开式。我们默认 Mach 数是固定的，忽略了问题的跨声速性质，因此，我们的解仅在跨声速区的上部有效。

直接的摄动展开会在来流 Mach 锥附近发生困难，摄动势的一级近似在那里有 1/2 阶零点，它将通过微商在高阶近似中产生奇异性。因此，我们令

$$\frac{1}{x}\varphi(x,r;\varepsilon) \sim \varepsilon^2 f_1(s) + \varepsilon^4 f_2(s) + \varepsilon^6 f_3(s) + \varepsilon^8 f_4(s) + \cdots \tag{9.21a}$$

$$\sqrt{M^2-1}\,\frac{r}{x} \sim s + \varepsilon^4 r_3(s) + \varepsilon^6 r_4(s) + \cdots \tag{9.21b}$$

来引进变形锥型变数 s. 在(9.21b)中，不出现 ε^2 阶的项，因为我们发现，到这一阶为止的坐标变形为零。同理，激波的形状以如下形式来描述：

$$\sqrt{M^2-1}\tan\sigma \sim 1 + k_3\varepsilon^4 + k_4\varepsilon^6 + \cdots \tag{9.22}$$

9.7 二阶近似和激波位置

把展开式(9.21)代入微分方程(9.19a)，由 ε^2 阶的项可得通常关于 f_1 的线性化方程

$$(1-s^2)f_1'' + \frac{f_1'}{s} = 0 \tag{9.23}$$

满足相切条件(9.19b)和第一激波条件(9.19c)的解是

$$f_1(s) = -(\operatorname{sech}^{-1}s - \sqrt{1-s^2}) \tag{9.24}$$

第二个激波条件 (9.19d) 是自动满足的，这就是为什么在式(9.22)中不需要 ε^2 项的理由。

现在，由微分方程中 ε^4 阶的项给出了二阶近似 f_2 的方程

$$(1-s^2)f_2'' + \frac{f_2'}{s} = G\,\frac{\operatorname{sech}^{-1}s}{\sqrt{1-s^2}} \tag{9.25a}$$

其中

$$G = \frac{\gamma+1}{M^2-1} \tag{9.25b}$$

积分上式并利用相切条件和第一激波条件，可得

$$f_2(s)=\frac{1}{2}G(\operatorname{sech}^{-1}s-\sqrt{1-s^2}\operatorname{sech}^{-1}s-\sqrt{1-s^2}) \quad (9.26)$$

这是跨声速小扰动形式的二阶解 (Van Dyke, 1952)，它是以马上就要确定的变形坐标来表达的.

微分方程中的 ε^6 阶的项给出了三阶近似的方程

$$\begin{aligned}(1-s^2)f_3''+\frac{f_3'}{s}=G^2\Big[&\frac{\operatorname{sech}^{-1}s}{1-s^2}-\frac{\operatorname{sech}^{-1}s}{\sqrt{1-s^2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\\&-\frac{1}{2}\frac{s^2(\operatorname{sech}^{-1}s)^2}{(1-s^2)^{3/2}}\Big]+\frac{(1-s^2)^{3/2}}{s}r_3''\\&-\frac{\sqrt{1-s^2}}{s^2}r_3'+\frac{1-3s^2}{s^3\sqrt{1-s^2}}r_3\end{aligned} \quad (9.27)$$

正是在这一步，如果不进行变形，就会发生不可逾越的困难。右边第一项在 $s=1$ 附近有 $G^2(1-s^2)^{-1/2}$ 阶的奇性，它将使速度具有相同的奇性. 适当选择变形函数 $r_3(s)$，就可克服这个弊病.

Lighthill (1949b) 应用最简单地选择的常数变形函数

$$r_3(s)=\frac{1}{2}G^2 \quad (9.28a)$$

成功地确定了激波的位置，他求解到哪一阶，激波位置就准确到哪一阶. 然而，消除了激波附近的非一致性，却引进了对称轴附近的另一种非一致性，以致在次级近似中，不能再在那里规定相切条件了. 这个困难可以通过选择线性变形函数来解决:

$$r_3(s)=\frac{1}{2}G^2s \quad (9.28b)$$

现在，可以用第二个激波条件来确定激波同来流 Mach 锥的偏差. 在激波上，根据 (9.21b)，(9.22) 和 (9.28b)，

$$s = 1 + \varepsilon^4[k_3 - r_3(s)] + \cdots = 1 + \varepsilon^4 \times \left(k_3 - \frac{1}{2}G^2\right) + \cdots \tag{9.29}$$

把它代入(9.19d)，可得

$$\sqrt{2\left(\frac{1}{2}G^2 - k_3\right)} + G = \frac{4}{G}k_3 \tag{9.30}$$

它的解是

$$k_3 = \frac{3}{8}G^2 \tag{9.31}$$

这是 Lighthill (1949b) 和 Bulakh (1961) 所得结果的跨声速小扰动形式。他们就求解到这一步，其解适用于任意形状横截面的细长锥。下一节有一些新的结果。

9.8 锥面上压力的三阶近似

利用上述变形函数，三阶近似的方程(9.27)简化为

$$(1-s^2)f_3'' + \frac{f_3'}{s} = G^2\left[\frac{\operatorname{sech}^{-1}s}{1-s^2} - \frac{\operatorname{sech}^{-1}s}{\sqrt{1-s^2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} - \frac{1}{2}\frac{s^2(\operatorname{sech}^{-1}s)^2}{(1-s^2)^{3/2}}\right] \tag{9.32}$$

积分上式，并应用相切条件和第一激波条件，得出

$$f_3(s) = \frac{1}{2}G^2\left[\left(\frac{5}{4} - \log 2\right)\sqrt{1-s^2} + (\log 2 - 1)\operatorname{sech}^{-1}s + \sqrt{1-s^2}\operatorname{sech}^{-1}s - \frac{1}{4}\left(\sqrt{1-s^2} + \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\right) \times (\operatorname{sech}^{-1}s)^2 + \int_s^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\log\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}dt\right] \tag{9.33}$$

这里的积分有如下性态：

$$\int_s^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\log\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}dt \sim \frac{1}{2}\log^2 s - \left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}\log^2 2\right.$$

$$- \log 2\Big) - \frac{1}{4} s^2 \log s + O(s^2) \tag{9.34a}$$

$$\sim \frac{1}{6}(1 - s^2)^{3/2} \log(1 - s^2) + O[(1 - s^2)^{3/2}] \tag{9.34b}$$

ε^6 阶的项给出了四阶近似的方程，右边在 $s = 1$ 附近取近似，该方程化为

$$(1 - s^2) f_4'' + \frac{f_4'}{s} \approx -G^3 \left[\left(\frac{3}{4} + 2 \frac{r_4}{G^3} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \log(1 - s^2) + \cdots \right] \tag{9.35}$$

取变形函数的次项为

$$r_4(s) = -\frac{1}{8} G^3 s [3 + \sqrt{1 - s^2} \log(1 - s^2)] \tag{9.36}$$

右边的奇性以及四阶速度中的奇性消除了，采用因子 s 还是为了防止在对称轴附近的非一致性。在激波上，上述结果给出

$$s = 1 - \frac{1}{8} G^2 \varepsilon^4 + \left(k_4 - \frac{3}{8} G^3 \right) \varepsilon^6 + \cdots \tag{9.37}$$

然后代入第二个激波条件(9.19d)，得出

$$k_4 = -\frac{1}{12} G^3 \tag{9.38}$$

用原先的参数来表达这个结果，我们发现激波位于

$$\sqrt{M^2 - 1} \frac{r}{x} \sim 1 + \frac{3}{8} \left[\frac{(r+1)\varepsilon^2}{M^2 - 1} \right]^2$$

$$- \frac{1}{12} \left[\frac{(r+1)\varepsilon^2}{M^2 - 1} \right]^3 + \cdots \tag{9.39}$$

可以按照 Oswatisch 和 Berndt (1950) 的跨声速相似律，把表面压力系数(9.20)表达为

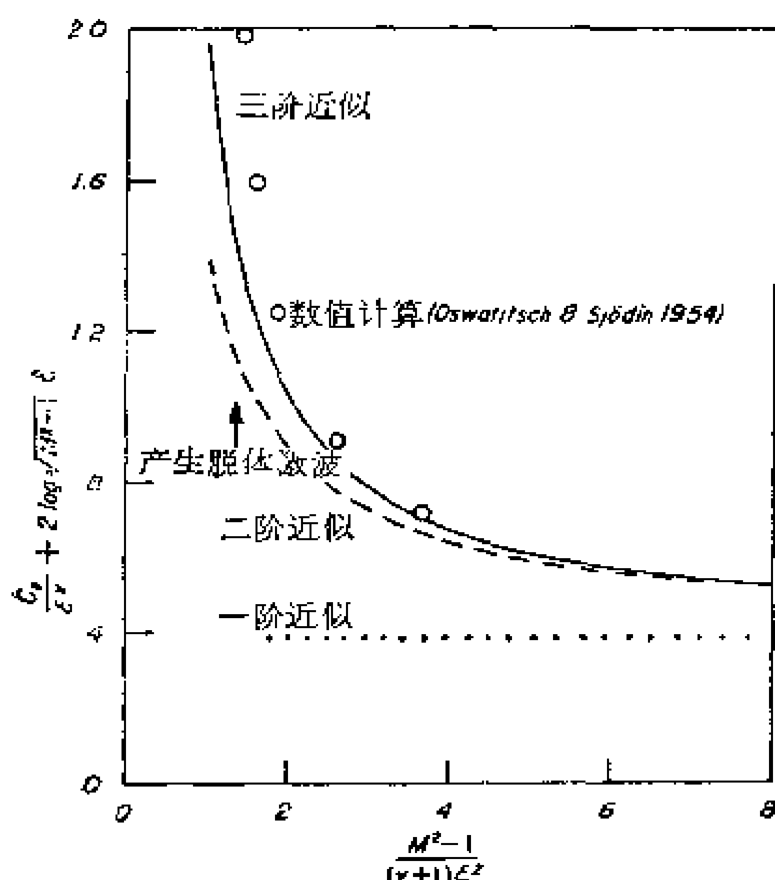


图 9.7 跨声速流中细长锥上的压力.

$$\frac{C_p}{\varepsilon^2}+2\log\sqrt{M^2-1}\,\varepsilon\sim(2\log 2-1)+\frac{(\gamma+1)\varepsilon^2}{M^2-1}$$

$$+\left(\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{4}\right)\left[\frac{(\gamma+1)\varepsilon^2}{M^2-1}\right]^2+\cdots \tag{9.40}$$

正如我们所预期的，这些结果是对于大的跨声速相似参数 $(\gamma+1)\varepsilon^2/(M^2-1)$ 的渐近展开式. 在图 9.7 中，表面压力的前三阶近似同 Oswatisch 和 Sjödin 的数值解进行了比较.

9.9 薄钝楔的高超声速绕流

在 5.3 节我们曾指出：小钝头会使置于无粘性超声速流中的物体下游处产生非一致性. 远离头部处的流场几乎处处接近于尖头物体的情况；然而，在物体表面上，由于沿着流线熵为常数，所以它等于正激波后的数值，而不是斜激波后的数

值．在那里，流场的某些其它物理量也必然不同．这种变化发生在穿过熵层时(图 9.8)，对于平面流动，熵层的厚度为头部半径的数量级．

Guiraud (1958) 首先把小钝头效应当作奇异摄动问题来处理．他考虑了正问题，这时，物体是给定的；对于给定激波、求物体形状的反问题，分析较为简单．Yakura (1962) 用匹配渐近展开法研究 Mach 数为无限大的完全气体流动时考虑了反问题．我们把 Yakura 关于钝楔的解用于薄楔的特殊情况，这样做虽然简化了分析，但把熵层分成两层对它具有明显的作用，所以，我们需要用外展开、中展开和内展开．

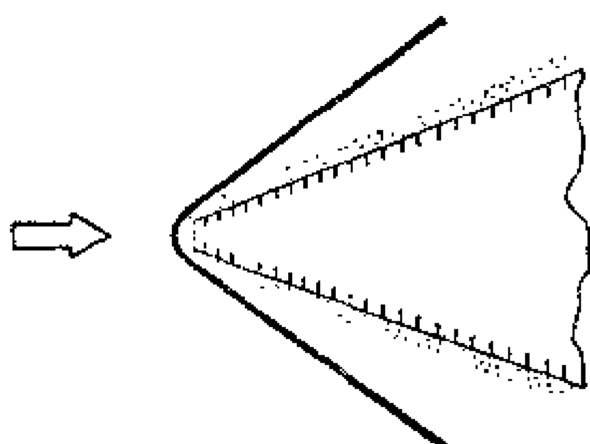


图 9.8　钝楔上的熵层．

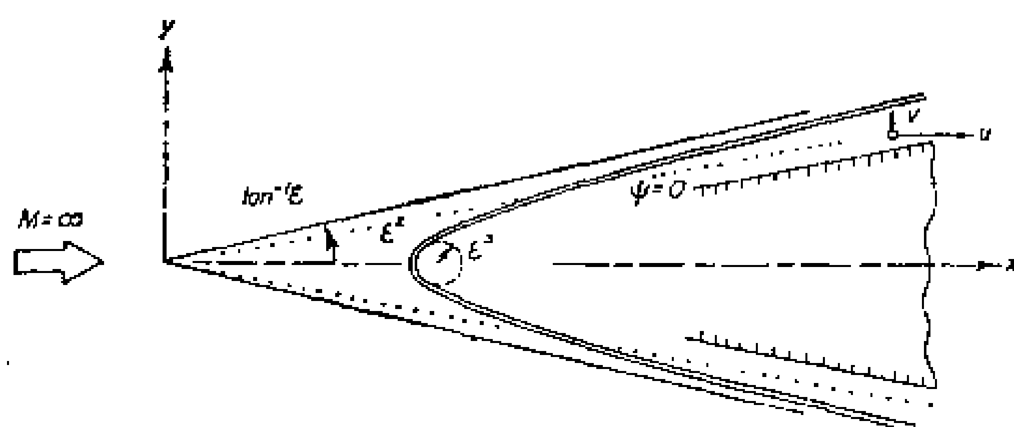


图 9.9　薄双曲线型激波的记号．

考虑双曲线形激波后的流场 (图 9.9)．假定其渐近斜率 ε 为小量，取头部半径为 ε^3，使得一级近似是尖楔的解．这样，我们便可对于小的头部半径进行参数摄动，而 Yakura 是对大 x 进行坐标摄动．激波的形状用

$$y_s^2 = \varepsilon^2 x^2 - \varepsilon^4 \tag{9.41}$$

来描述。

在反问题中，由流函数 ϕ 为零可以十分方便地求出物体形状。我们按通常方式引进可压缩流的流函数，令

$$d\phi = \rho u dy - \rho v dx \tag{9.42}$$

守恒方程是

连续性方程： $(\rho u)_x + (\rho v)_y = 0$ (9.43a)

x-动量方程： $\rho(uu_x + vu_y) + p_x = 0$ (9.43b)

y-动量方程： $\rho(uv_x + vv_y) + p_y = 0$ (9.43c)

熵方程： $u(p/\rho^\gamma)_x + v(p/\rho^\gamma)_y = 0$ (9.43d)

上述的最后一个方程表达了沿着介于激波间的流线，熵为常数这样一个事实，这个方程同能量守恒是等价的。我们利用这个性质，取流函数为自变量，用边界层理论中的 Von Mises 变换来交换 y 和 ϕ 的作用，这样做是有好处的。于是，微分方程(9.43)就变成

流线斜率： $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{v}{u}$ (9.44a)

连续性方程： $\dfrac{\partial y}{\partial \phi} = \dfrac{1}{\rho u}$ (9.44b)

垂直于流线的动量方程： $\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial p}{\partial \phi} = 0$ (9.44c)

Bernoulli 方程： $u^2 + v^2 + \dfrac{2\gamma}{\gamma - 1}\dfrac{p}{\rho} = 1$ (9.44d)

熵积分： $p/\rho^\gamma = f(\phi)$ (9.44e)

以来流速度 U ρ_∞ 和 $\rho_\infty U^2$ 为速度、密度和压力的特征量，将流动中的变量无量纲化，这使上述方程保持不变。因为激波斜率为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon x}{\sqrt{x^2 - \varepsilon^2}} \tag{9.45}$$

Rankine-Hugoniot 关系就提供了初始条件

$$
\left.\begin{aligned}
p &= \frac{2}{\gamma+1}\varepsilon^2 \frac{x^2}{(1+\varepsilon^2)x^2-\varepsilon^2} \\
\rho &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \\
u &= 1-\frac{2}{\gamma+1}\varepsilon^2 \frac{x^2}{(1+\varepsilon^2)x^2-\varepsilon^2} \\
v &= \frac{2}{\gamma+1}\varepsilon \frac{x\sqrt{x^2-\varepsilon^2}}{(1+\varepsilon^2)x^2-\varepsilon^2} \\
y &= \varepsilon\sqrt{x^2-\varepsilon^2}
\end{aligned}\right\}(\text{在 } \psi = \varepsilon\sqrt{x^2-\varepsilon^2} \text{ 上}) \tag{9.46}
$$

因此，在激波上计算的熵积分(9.44e)为

$$
\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^\gamma \varepsilon^2 \frac{\psi^2+\varepsilon^4}{(1+\varepsilon^2)\psi^2+\varepsilon^6} \tag{9.44e'}
$$

9.10 钝楔的小扰动解

当摄动参数 ε 等于零时，上述问题化为尖楔的高超声速小扰动问题（Hayes 和 Probstein, 1959, p. 47）。初始条件(9.46)表明，要用展开成 ε^2 的幂级数方法来改进基本解。因此，我们作通常的高超声速小扰动展开（Hayes 和 Probstein, 1959，第二章），令

$$u \sim 1 + \varepsilon^2 u_1(x,\psi_1) + \varepsilon^4 u_2(x,\psi_1) + \cdots \tag{9.47a}$$

$$v \sim \varepsilon v_1(x,\psi_1) + \varepsilon^3 v_2(x,\psi_1) + \cdots \tag{9.47b}$$

$$p \sim \varepsilon^2 p_1(x,\psi_1) + \varepsilon^4 p_2(x,\psi_1) + \cdots \tag{9.47c}$$

$$\rho \sim \rho_1(x,\psi_1) + \varepsilon^2 \rho_2(x,\psi_1) + \cdots \tag{9.47d}$$

$$y \sim \varepsilon y_1(x,\psi_1) + \varepsilon^3 y_2(x,\psi_1) + \cdots \tag{9.47e}$$

其中

$$\psi_1 = \frac{\psi}{\varepsilon} \tag{9.48}$$

是流函数，它指的是 $x = O(1)$ 处激波层的典型厚度。

把上述展开式代入完整的问题(9.44)和(9.46)，让 ε 的同次幂项相等，得出一级近似的非线性方程组，其解就是尖楔的解：

$$p_1 = -u_1 = v_1 = \frac{2}{\gamma + 1}$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad y_1 = \frac{2x + (\gamma - 1)\phi_1}{\gamma + 1} \tag{9.49}$$

二阶近似的线性方程组也可求出封闭形式的解．然而，注意到熵积分(9.44e′)给出了二阶近似

$$\frac{p_2}{\rho_1} - \gamma \frac{\rho_2}{p_1} = \frac{1}{\phi_1^2} - 1 \tag{9.50}$$

我们的目的就达到了。在 $\phi_1 = 0$ 处，有奇异性．我们发现压力是正则的，所以密度在物体表面上具有与 $1/\phi_1^2$ 相同的奇性；同样，v 是正则的，y 具有与 $1/\phi_1$ 相同的奇性；u 有 $1/\phi_1^2$ 型的奇性。这些非一致性也出现在三阶和高阶近似中．

9.11 熵层的中层开

因为尖楔的解不是在熵层中有效的一级近似，所以直接的小扰动展开在物体表面附近不成立，我们用匹配渐近展开法来处理这种非一致性．

由于非一致性象边界层理论一样，发生在一条曲线附近，所以只需要放大法向坐标 ϕ_1 就可以了．根据(9.47d)，(9.49)和(9.50)三式，当 ϕ_1 为小量时，密度外展开的性态为

$$\rho \approx \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma \phi_1^2} + \cdots\right) \tag{9.51}$$

这就意味着要引进新的自变量

$$\bar{\phi} = \frac{\phi_1}{\varepsilon} = \frac{\phi}{\varepsilon^2} \tag{9.52}$$

我们称它为中变量，因为要达到物体表面，还要再进行放大.

同外展开相比较，说明有如下形式的中展开：

$$u \sim 1 + \varepsilon^2 \bar{u}_1(x,\bar{\phi}) + \varepsilon^4 \bar{u}_2(x,\bar{\phi}) + \cdots \tag{9.53a}$$

$$v \sim \varepsilon \bar{v}_1(x,\bar{\phi}) + \varepsilon^3 \bar{v}_2(x,\phi) + \cdots \tag{9.53b}$$

$$p \sim \varepsilon^2 \bar{p}_1(x,\bar{\phi}) + \varepsilon^4 \bar{p}_2(x,\phi) + \cdots \tag{9.53c}$$

$$\rho \sim \bar{\rho}_1(x,\bar{\phi}) + \varepsilon^2 \bar{\rho}_2(x,\bar{\phi}) + \cdots \tag{9.53d}$$

$$y \sim \varepsilon \bar{y}_0(x,\bar{\phi}) + \varepsilon^2 \bar{y}_1(x,\bar{\phi}) + \varepsilon^3 \bar{y}_2(x,\bar{\phi}) + \cdots \tag{9.53e}$$

把上式代入完整的方程(9.44)，并按渐近匹配原理(5.24)同外展开(9.47)的主项相匹配，得到的一级近似为

$$\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \bar{\phi}} = 0, \qquad \bar{y}_0(x,\infty) = \frac{2}{\gamma+1} x \tag{9.54a}$$

$$\bar{v}_1 = \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial x}, \qquad \bar{v}_1(x,\infty) = \frac{2}{\gamma+1} \tag{9.54b}$$

$$\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{\phi}} = 0, \qquad \bar{p}_1(x,\infty) = \frac{2}{\gamma+1} \tag{9.54c}$$

$$\frac{\bar{p}_1}{\bar{\rho}_1^{\gamma}} = \frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\gamma} \frac{1+\bar{\phi}^2}{\bar{\phi}^2},$$

$$\bar{\rho}_1(x,\infty) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \tag{9.54d}$$

$$2\bar{u}_1 + \bar{v}_1^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{\bar{p}_1}{\rho_1} = 0,$$

$$\bar{u}_1(x,\infty) = -\frac{2}{\gamma+1} \tag{9.54e}$$

$$\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial \bar{\phi}} = \frac{1}{\bar{\rho}_1}, \bar{y}_1(x,\bar{\phi}) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\bar{\phi} \ (\text{当 } \bar{\phi} \to \infty) \tag{9.54f}$$

这些方程可以依次求解，得出

$$\bar{y}_0 = \frac{2}{\gamma+1} x, \qquad \bar{v}_1 = \frac{2}{\gamma+1}$$

$$\bar{p}_1 = \frac{2}{\gamma + 1}, \qquad \bar{\rho}_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\left(\frac{\bar{\psi}^2}{1 + \bar{\psi}^2}\right)^{1/\gamma}$$

$$\bar{u}_1 = -\frac{2}{(\gamma + 1)^2} - \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)^2}\left(\frac{1 + \bar{\psi}^2}{\bar{\psi}^4}\right)^{1/\gamma} \tag{9.55}$$

$$\bar{y}_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\left\{ \bar{\psi} - \int_{\bar{\psi}}^{\infty} \left[\left(\frac{1 + t^2}{t^2}\right)^{1/\gamma} - 1\right] dt\right\}$$

这个展开式在物体表面附近也是无效的. 因为在那里, 一级近似的速度分量 u 为无穷大,密度为零. 对于二级近似, 由熵积分(9.44e′)导出

$$\gamma \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} = \frac{1}{\bar{\psi}^2} + 1 + \frac{\bar{p}_2}{\bar{p}_1} \tag{9.56}$$

我们仍可证明 $\bar{p}_2$ 是正则的. 因此, 由于式 (9.55), ρ_2 具有 $\bar{\psi}^{-(2-2/\gamma)}$ 阶的奇性.

9.12 熵层的内展开

中展开的非一致性说明, 为了求出完整的解还要第三个渐近展开式. 按照(9.53d), (9.55), (9.56)式可知, 对于小的 $\bar{\psi}$, 密度的中展开的性态为

$$\rho \sim \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\bar{\psi}^{2/\gamma}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\gamma\bar{\psi}^2} + \cdots\right) \tag{9.57}$$

这就表示要引进新的内变量

$$\Psi = \frac{\bar{\psi}}{\varepsilon} = \frac{\psi}{\varepsilon^3} \tag{9.58}$$

这是以激波的头部半径来归一化的流函数.

同中展开相比较说明有如下形式的内展开:

$$u \sim 1 + \varepsilon^{2-2/\gamma}U_1(x, \Psi) + \cdots \tag{9.59a}$$

$$v \sim \varepsilon V_1(x, \Psi) + \cdots \tag{9.59b}$$

$$p \sim \varepsilon^2 P_1(x, \Psi) + \cdots \tag{9.59c}$$

$$p \sim \quad \varepsilon^{2/\gamma} R_1(x,\psi) + \cdots \tag{9.59d}$$

$$y \sim \varepsilon Y_0(x,\psi) + \varepsilon^{3-2/\gamma} Y_1(x,\psi) + \cdots \tag{9.59e}$$

代入完整的方程，并同中展开相匹配，得到

$$\frac{\partial Y_0}{\partial \psi} = 0, \qquad Y_0(x,\infty) = \frac{2}{\gamma+1}x \tag{9.60a}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial \psi} = 0, \qquad P_1(x,\infty) = \frac{2}{\gamma+1} \tag{9.60b}$$

$$\frac{P_1}{R_1^{\gamma}} = \frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\gamma}\frac{1}{1+\psi^2},$$

$$R_1(x,\psi) \sim \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\psi^{2/\gamma} \tag{9.60c}$$

$$U_1 = -\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P_1}{R_1},$$

$$U_1(x,\psi) \sim -\frac{2\gamma}{(\gamma+1)^2}\psi^{-2/\gamma} \tag{9.60d}$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \psi} = \frac{1}{R_1},$$

$$Y_1(x,\psi) \sim -\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\int_{\psi}^{\infty}\frac{dt}{t^{2/\gamma}} \tag{9.60e}$$

这些方程可以依次积分，得出

$$Y_0 = \frac{2}{\gamma+1}x, \quad R_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}(1+\psi^2)^{1/\gamma}$$

$$P_1 = \frac{2}{\gamma+1} \quad U_1 = -\frac{2\gamma}{(\gamma+1)^2}\frac{1}{(1+\psi^2)^{1/\gamma}} \tag{9.61}$$

$$Y_1 = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\int_{\psi}^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{1/\gamma}}$$

最后这个展开式在物体表面上有效，尤其是它给出了产生双曲线形激波的渐近物形：

$$y \sim \varepsilon\left[\frac{2}{\gamma+1}x - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\varepsilon^{2-2/\gamma}\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{1/\gamma}} + \cdots\right]$$

$$= \varepsilon\left[\frac{2}{\gamma+1}x - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\gamma^{-1}-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma^{-1})} \times \varepsilon^{2-2/\gamma} + \cdots\right] \tag{9.62}$$

其中，Γ 是指伽玛函数．上式第一项是尖楔的结果，在图 9.9 中以点线表示；第二项是熵层位移厚度的渐近值．如同粘性边界层的情况一样，由于钝头使熵、温度增加，因而密度相应地减小，所以质量通量减小了．因此，在正问题中，(图 9.10a) 激波虽在头部附近离物体更近了，但迫使它在下游处离物体更远了；对于反问题(图 9.10b)，情况则不同，必须挪动物体．由 (9.54c) 和 (9.60b) 可见，熵层同粘性边界层的另一相似之处是很明显的，即准确到一阶近似，通过熵层或边界层时，压力为常数．

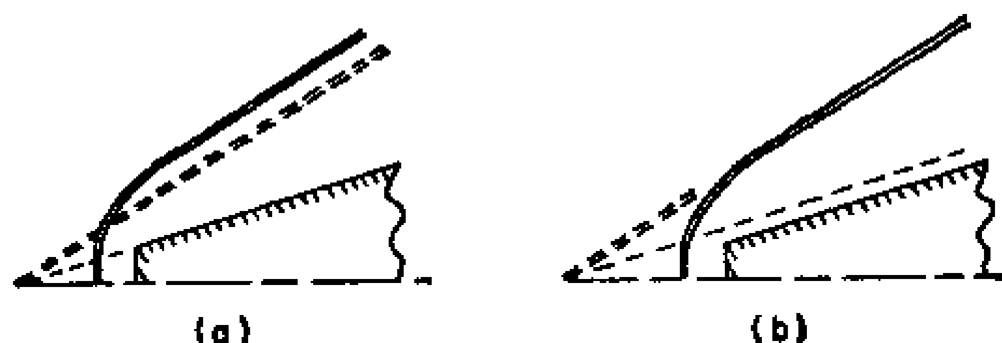


图 9.10　钝头的位移效应．a) 正问题，b) 反问题．

在分析非细长楔时，Yakura (1962) 已经计算了下一阶近似解．该阶近似在式(9.62)中增加了 x^{-1} 阶的项，这就足以在准确到几个头部半径的程度内精确地描述物体的形状了．Yakura 的分析只要用外展开和内展开．我们的中展开是由于双重极限过程引起的(参看 5.3 节)，此时，头部半径和斜率

同时趋于零。图 9.11 指出了它是怎样得出反映三个展开式特征的三个不同长度的。这里我们默认 L 为 1 的量阶.

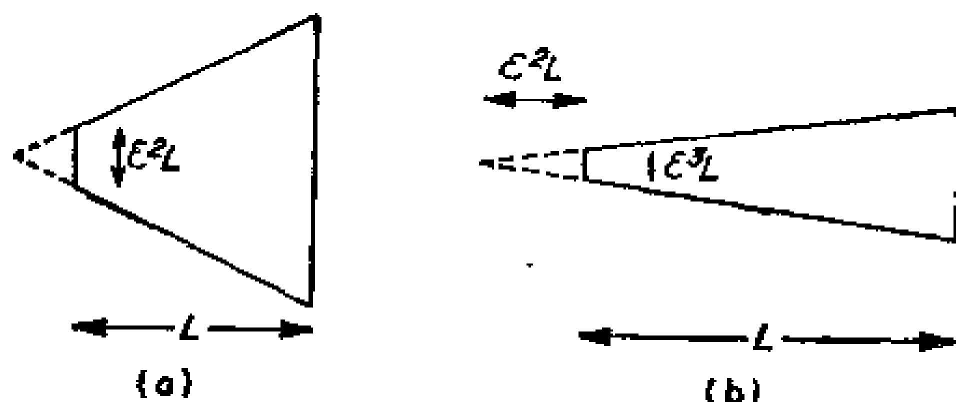


图 9.11 钝楔的不同特征长度. a) 厚楔, b) 薄楔.

9.13 钝楔解的合成展开

为了展示流场中的物理量在整个激波和物体间的扰动区内的变化，我们要把不同的展开式组成一个单一的合成展开式. 它为由两个以上的展开式构成一个合成展开式的方法提供了一个颇有用处的实例(参看习题 5.4).

首先考虑密度，应用乘法法则(5.34)于中间解和内解，得到

$$\rho \sim \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\phi^2+\varepsilon^6}{\phi^2+\varepsilon^4}\right)^{1/\gamma} \tag{9.63}$$

它在熵层的两个子层中都成立. 上述表达式在取中极限和内极限时有不同的形式，这是一目了然的. 重复这个过程，把它同外解相结合，结果保持不变，因此，这是在三个区域中一致有效的近似表达式.

如果我们用加法法则(5.32)，一致有效近似为

$$\rho \sim \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left[\left(\frac{\phi^2}{\phi^2+\varepsilon^4}\right)^{1/\gamma}+\left(\frac{\phi^2+\varepsilon^6}{\varepsilon^4}\right)^{1/\gamma} -\left(\frac{\phi^2}{\varepsilon^4}\right)^{1/\gamma}\right] \tag{9.64}$$

虽然，它同前者是等价的，由于前者简单，我们宁可采用前者.它也相应于 Yakura 厚楔的结果.

对于坐标 y，三个近似式可以写为

外展开：
$$y \sim \frac{2}{\gamma+1}\varepsilon x+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\phi \tag{9.65a}$$

中展开：
$$y \sim \frac{2}{\gamma+1}\varepsilon x+\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \times\left\{\phi-\int_{\psi}^{\infty}\left[\left(\frac{t^2+\varepsilon^4}{t^2}\right)^{1/\gamma}-1\right]dt\right\} \tag{9.65b}$$

内展开：
$$y \sim \frac{2}{\gamma+1}\varepsilon x-\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \times\int_{\phi}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon^4}{t^2+\varepsilon^6}\right)^{1/\gamma}dt \tag{9.65c}$$

无论加法或乘法合成的结果都不必要地复杂化了. 用观察法求出了较简单的形式：

$$y \sim \frac{2}{\gamma+1}\varepsilon x+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left\{\phi-\int_{\phi}^{\infty}\left[\left(\frac{t^2+\varepsilon^4}{t^2+\varepsilon^6}\right)^{1/\gamma}-1\right]dt\right. \tag{9.66}$$

上式相应于 Yakura 用加法合成为他所获得的两个展开式的结果(参看注 6).

图 9.12 是对于 $\varepsilon=0.437$ 时(相应于 20° 半顶角的楔)，离开双曲线形激波头部 24.5 倍半径处，激波和物体间的密度分布；图上还有外区、中区、内区的近似解，以及 Yakura 的结果(他没有作薄楔的假定). 物面位置的不一致说明这是因 ε 值如此之大而产生的误差.

Yakura (1962) 也已经把匹配渐近展开法应用到 $M=\infty$ 时，产生旋转双曲面激波的钝锥，和产生旋转抛物面激波的物

体的轴对称问题．后者也已为 Sychev (1962) 用变形坐标法同样成功地得到解决；但钝楔问题似乎不能用变形坐标法求解．

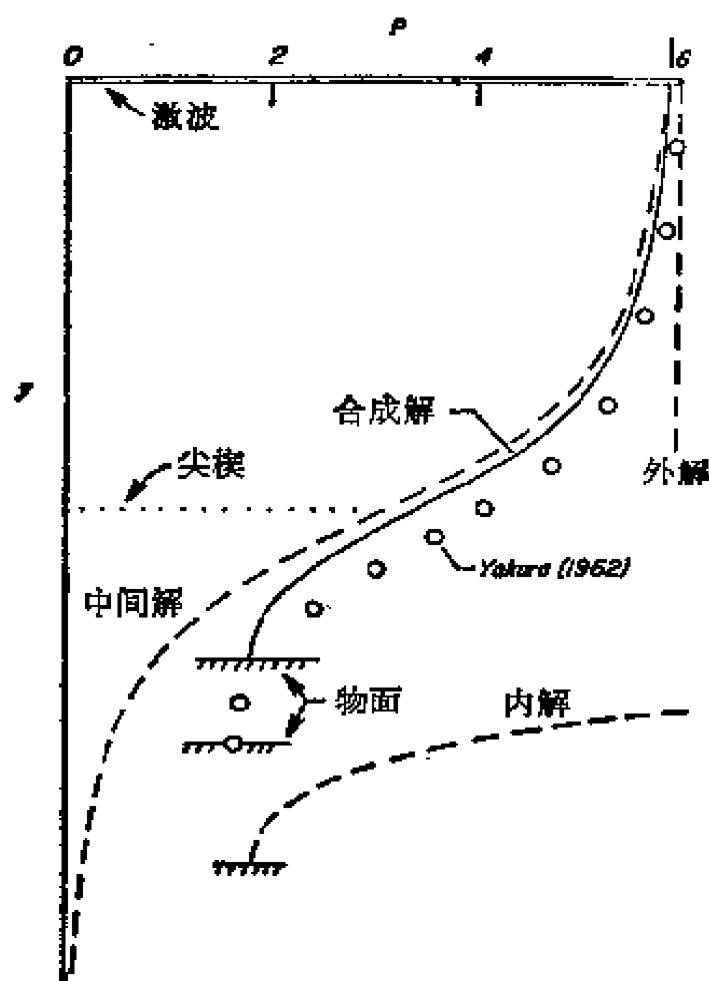


图 9.12 $M=\infty, \gamma=7/5$，在 20° 楔上离头部 24.5 倍激波半径处的密度分布．

习　　题

9.1 细长无升力机翼． 作为大展弦比机翼厚度效应的模型，考虑垂直于细长光滑旋转体轴的不可压缩位势流动(图 9.13)．试证，一阶近似的流动在每个截面内是平面流动，但直接迭代会导致类似于 Whitehead 的困难(参看第八章)．用匹配渐近展开法求次级近似，把结果应用于旋转椭球，用 Munk 法则(1929)验证：任一椭球表面上的速度等于最大速度在其切平面上的投影．把解应用于尖头抛物纺锤体，试解释为

什么在椭球翼梢处不必予以修正．对于纺锤形物体的翼梢处，试提出一种修正方法，并予以应用。

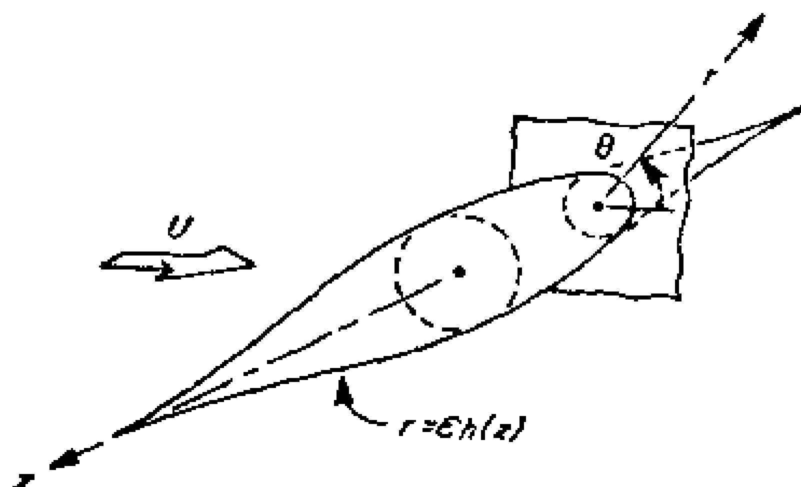


图 9.13 垂成于细长旋成体的流动．

9.2 尖翼梢的升力机翼． 对于由两根抛物线形弧构成的双凸平面形状机翼，用(9.15)和(9.16)两式计算二阶展向载荷和升力曲线的斜率．提出一种使解在翼梢处一致有效的修正方案，讨论菱形平面形状中部相应的修正方法．

9.3 波形壁上的近平衡流． 考虑处于振动和化学非平衡态的无粘气体定常平面流动．在平衡时，Mach 数为$\sqrt{2}$的速度势的线性化方程为（Vincenti, 1959）

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)=0$$

其中 $0<A<1$，ε 正比于弛豫时间（参看注 3）．用大家熟悉的，波形壁 $y=\tau\sin x$ 上平衡流的结果($\varepsilon=0$)，以求出 $\varepsilon\tau$ 阶的修正项．使用斜坐标系 $\xi=x-y$, $\eta=y$ 是有用的(参看 6.4 节)．改进在壁面远上方非一致有效区域中的结果，构造一致有效的一阶近似，并同 Vincenti 的解进行比较．

第十章　摄动理论的其它方面

10.1　引言

最后这一章阐述摄动理论的若干专题. 我们首先考虑处理奇异摄动问题的几种方法，这几种方法和前面几章所使用的两种标准方法是不相同的. 其次讨论对数在摄动展开中的独特作用. 然后比较详尽地研究"从发散级数或慢收敛级数获得精确结果"这个引人入胜的问题. 最后我们讲述，当两个不同的摄动展开式不能在匹配渐近展开法意义上相匹配时，如何把它们连接起来的方法.

10.2　合成方程法

在第八章，我们看到 Oseen 是怎样用部分保留被略去的对流项的方法，来消除小 Reynolds 数流动 Stokes 近似的非一致性的. 这种想法同样也适用于由微分方程产生非一致性的任何奇异摄动问题. 进行的步骤如下:

(a) 从微分方程中找出下面这类项: 在直接展开时略去它们就会产生非一致性;

(b) 尽可能地把这类项作近似，并保持它们在非一致有效区中的主要特性;

(c) 求解所得的合成方程.

Lighthill (1948) 和 Cheng (1962)已经把这种特定的方法分别成功地应用于确定激波位置和研究倾斜圆锥绕流的涡层问题.

不过，合成方程法总好象不如原先讨论过的那两种较为

系统的方法．在小 Reynolds 数流动问题中（第八章），合成方程法的缺点是明显的．在该问题中，相对而言，内外展开式比 Oseen 方程的合成解要简单些．所以，在激波问题中，这种方法已为变形坐标法所取代（9.6 节；Lighthill 1949 b）；对于涡层问题，则为匹配渐近展开法所取代（Munson，1964）．

作为例子，可以再来考虑半无限平板的边界层问题（第七章），以说明合成方程法的不足．根据经验（7.14 节），我们使用抛物坐标．在该坐标系中由 Navier-Stokes 方程得到习题 8.1 中的流函数方程．直接进行近似，即令 $\nu=0$，可得

$$\left(\psi_\xi \frac{\partial}{\partial\eta}-\psi_\eta \frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{\psi_{\xi\xi}+\psi_{\eta\eta}}{\xi^2+\eta^2}=0 \tag{10.1}$$

这个方程在边界层内不成立．在该区域内把 Prandtl 的方法应用于完整的 Navier-Stokes 方程，导出

$$\frac{1}{\xi^2}\left[\nu\psi_{\eta\eta\eta\eta}+\psi_\xi\psi_{\eta\eta\eta}-\psi_\eta\psi_{\xi\eta\eta}+\frac{2}{\xi}\psi_\eta\psi_{\eta\eta}\right]=0 \tag{10.2}$$

现在，我们来求把上述两种近似都包括在内的合成方程．在式（10.2）中，仅第一项不出现在式（10.1）中．现把它补充到式（10.1）中，便得出合成方程：

$$\frac{\nu}{\xi^2}\psi_{\eta\eta\eta\eta}+\left(\psi_\xi \frac{\partial}{\partial\eta}-\psi_\eta \frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{\psi_{\xi\xi}+\psi_{\eta\eta}}{\xi^2+\eta^2}=0 \tag{10.3}$$

由于我们所取的坐标对这个问题来说是最优坐标（7.13 节），所以可以认为，以抛物坐标表达的 Blasius 解是上述合成方程合适的解：

$$\psi(\xi,\eta;\nu)=\sqrt{\nu\xi}\,f\left(\frac{\eta}{\sqrt{\nu}}\right) \tag{10.4}$$

然而，通过验证说明，它并不是方程（10.3）的解．事实上并不存在简单的解．在同时处理内外区的困难时，我们给自己提出了一个棘手的问题．

当然合成方程不是唯一的．可以把从完整的 Navier-Stokes

方程中略去的任一项以及位势流方程乘以任一常数因子，加到式(10.3)中去。这样，已知解(10.4)后，我们可以构造为它所满足的无数个不同的合成方程。其中，最简单的方程之一为

$$\nu\left[\xi^2\phi_{\eta\eta\eta\eta}-2\eta\frac{\partial}{\partial\eta}(\phi_{\xi\xi}+\phi_{\eta\eta})\right]$$

$$+\left[\xi^2\left(\phi_\xi\frac{\partial}{\partial\eta}-\phi_\eta\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+2(\xi\phi_\eta-\eta\phi_\xi)\right]$$

$$\times(\phi_{\xi\xi}+\phi_{\eta\eta})=0. \tag{10.5}$$

但是，对于选择合成方程，对问题的理解确实没有给予我们任何启示。

10.3 合成展开法

直接得到一致有效解的一种更有前途的方法是，代入一个假定的合成展开式（参看 5.4 节）。Latta (1951) 指出，人们往往可以从观察内解（"边界层解"）来推断所需展开式的形式，它为我们提供了有限个特定的函数作为展开式的基。

我们以 Friedrichs 的数学模型 (5.1) 为例来说明这种方法。内解 (5.6b) 同函数 $e^{-x/\varepsilon}$ 有关。由于对它进行微商后，仍得到原来的函数，就不再需要别的特定的函数了。所以，Latta 假定合成展开式的形式如下：

$$f(x;\varepsilon)\sim[f_1(x)+\varepsilon f_2(x)+\cdots]+e^{-x/\varepsilon}[h_1(x)+\varepsilon h_2(x)+\cdots] \tag{10.6}$$

把它代入式(5.1)，归并 ε 和因子 $e^{-x/\varepsilon}$ 的同次幂项，得出

$$f_1'=a,\ h_1'=0,\ f_1(0)+h_1(0)=0,\ f_1(1)=1 \tag{10.7a}$$

$$f_m'=-f_{m-1}''=0,\ h_m'=h_{m-1}''=0,\ f_m(0)+h_m(0)=0,$$
$$f_m(1)=0,\ m\geqslant 2 \tag{10.7b}$$

求解上述方程，得到 $f_1=(1-a)+ax$，$h_1=-(1-a)$，

$f_m = h_m = 0$。因此，其解为

$$f(x;\varepsilon) \sim (1-a)(1-e^{-x/\varepsilon}) + ax \tag{10.8}$$

这个结果被认为是在我们所关心的区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 中一致有效的，其误差小于 ε 的任意次幂．同精确解 (5.2) 相比较，可见上述结论是正确的。

在较复杂的问题中，内解及其导数可能提供了一个以上的迅变特定函数．譬如，我们考虑在笛卡儿坐标系中半无限平板的线性化 Oseen 方程(8.16)。边界层解包含了余误差函数 $\mathrm{erfc}\,(y/2R^{-1/2}x^{1/2})$，我们还必须将其导数 $\exp(-y^2/4R^{-1}x)$ 包括在内，而高阶导数没有给出任何新函数。把特定函数自变量的形式加以拓广可能也是必要的，可以允许它是在分析过程中待定的、所有坐标的光滑函数。由于用上述两种方法作了改进，绕平板 Oseen 流动流函数的合成展开式取如下形式:

$$\begin{aligned}\psi(x, y; R) \sim &[f_1(x, y) + R^{-1/2}f_2(x, y) + \cdots] \\ &+ \mathrm{erfc}[g(x, y)/R^{-1}]^{1/2}[h_1(x, y) + R^{-1/2}h_2(x, y) \\ &+ \cdots] + \exp[g(x, y)/R^{-1}][k_1(x, y) \\ &+ R^{-1/2}k_2(x, y) + \cdots]\end{aligned} \tag{10.9}$$

本例中，引进函数 g 允许改变自变量，这一点是最重要的；但对于上面一个例子，这就不必要了．事实上，我们发现 $g(x, y)$，必须是 $\frac{1}{2}\left[(x^2+y^2)^{1/2}-x\right]$，即 $\frac{1}{2}$ 倍抛物坐标 η 的平方。由该抛物坐标自然导致了 Kaplun (7.13 节) 的最优坐标。读者要了解细节，可以求出其解，或参看 Latta (1951) 的文章。

可能遇到更复杂的情况，尤其是在非线性问题中．对 6.2 节的典型问题来说，由内解 (6.18) 所提示的迅变函数及其导数有无数个．还有，观察内解也不一定总是能给我们指出特

殊函数的正确形式的。

10.4 多重尺度法

可以假定一个更一般形式的合成展开式，以避免刚才所提到的困难。如 5.3 节所述，一个摄动解是奇异的，这是因为关于某个坐标，它含有两个不同的长度尺度（参看注 14）。因此，Cochran (1962) 和 Mahony (1962) 认为，其解分别以两种尺度依赖于这一坐标。也就是说，敏感的坐标由一对坐标来代替，从而增加了自变量的数目。这样，我们就可以采用通常的渐近展开式了。Cole 和 Kevorkian (1963) 提出了类似的想法。

我们还是用 Friedrichs 模型 (5.1) 作为例子。从内解或其它考虑知道，其解不仅依赖于 x 本身，而且依赖于 x/ε，这一点是很明显的。因此，我们假定如下形式的渐近展开式：

$$f(x;\varepsilon)\sim f_1(x,X)+\varepsilon f_2(x,X)+\varepsilon^2 f_3(x,X)+\cdots \tag{10.10a}$$

其中

$$X\equiv x/\varepsilon \tag{10.10b}$$

要求上述展开式不仅在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 中，而且在区间 $0\leqslant X\leqslant\infty$ 中是一致有效的。为了保证 $X\to\infty$ 时（相应于 $x>0$，$\varepsilon\to 0$）的一致性，必须加上某些限制。实际上，这是该方法的症结所在。

我们当然已经用偏微分方程取代了常微分方程。但以后我们会看到，实际上，这并不会使问题复杂化。代入式 (5.1)，让 ε 的同次幂项相等，得到如下的方程组：

$$f_{1XX}+f_{1X}=0 \tag{10.11a}$$

$$f_{2XX}+f_{2X}=a-2f_{1xX}-f_{1x} \tag{10.11b}$$

$$f_{mXX}+f_{mX}=-2f_{(m-1)xX}-f_{(m-1)x}-f_{(m-2)xx},\quad m\geqslant 3 \tag{10.11c}$$

虽然它们在名义上是偏微分方程，但第一个方程在形式上完全同第一个内方程[式(5.5)，$\varepsilon = 1$]一样，且情况往往总是如此。该方程的解为

$$f_1(x, X) = c_1(x) + d_1(x)e^{-X} \tag{10.12}$$

这里，积分函数 $c_1(x)$ 和 $d_1(x)$ 仍是任意的。

这时，论述十分类似于 Lighthill 的变形坐标法(第六章)。倘若合成展开式 (10.10) 是一致有效的，当 $\varepsilon \to 0$ 时，比值 f_2/f_1，f_3/f_2 等等必须是一的数量级。因此，我们要求：

> "对于自变量的所有值，当 $\varepsilon \to 0$ 时，每阶近似不比它低阶的近似具有更强的奇性。或者说，趋于零的速度不比它低阶近似更慢。上述论断对各阶导数都成立。" (10.13)

显然它十分类似于 Lighthill 原理 (6.1)。

正如变形坐标法一样，可以通过考察二阶方程而不必求解来获得一致有效的一阶近似。对于我们这个例子，二阶方程 (10.11b) 成为

$$f_{2XX} + f_{2X} = a - c_1'(x) + d_1'(x)e^{-X} \tag{10.14}$$

任一特解要包含形如 $(a - c_1')X$ 的项，这一项当 $X \to \infty$ 时会使二阶近似比一阶近似具有更强的奇性，因此，可选定 $c_1'(x) = a$ 来消除它；同样，余下的特解将包含形如 $-d_1'Xe^{-X}$ 的项，这一项当 $X \to \infty$ 时，会使 f' 的二阶近似比一阶近似趋于零的速度更慢，因此，我们选定 $d_1'(x) = 0$ 来消去右边的项。现用 x/ε 代替式 (10.12) 中的 X，并加上(5.1)的边界条件，可以得到常数 c_1 和 d_1 的值。

对于更复杂的问题，至少要把上述方法作一些推广。正如前一种方法一样，置

$$X = \frac{g(x)}{\varepsilon}, \quad g(0) = 0 \tag{10.15}$$

从而拓广了放大坐标 (10.10b) 的形式，这样做或许是必要

的。其中 g 是光滑函数，当其自变量为正数时取正值，该函数在分析过程中加以确定。对于本例，读者可以验证，法则 (10.13) 要求 $g'(x) = 1$。当然，g 在非一致有效区一般应该为零，ε 可以用摄动参数的其它幂次函数或别的函数来代替，渐近序列可以包含不同于 ε 整数次幂的函数。由于引进了新变量 X，偏微分方程的维数仅增加一，但函数 g 必须依赖于原先的自变量。Cochran (1962) 给出了几个有启发性的例子。

我们看到，多重尺度法和上一节讨论的方法，把匹配渐近展开法得到的内解变成一致有效渐近解。因此，它们显然回答了"怎样推广最优坐标概念"的问题 (7.15 节)。正是由于函数 g 的作用，给我们提供了使坐标系最优化所需的自由度。随着上述方法的进一步发展，其中之一可能取代原先所用的那些方法，并成为处理奇异摄动问题通用的、可靠的方法。

10.5 对数项的盛行

热衷于摄动法的研究者，经常因为在完全出人意料的场合出现对数项而感到惊奇。流体力学最近的历史，记载了一些著名学者似乎合理地假定了展开式为小参数的幂级数而遭到失败的事例。正如第三章提到的，困难首先给予我们的启示是，要随时怀疑是否会出现对数项。对数项会出现在参数摄动和坐标摄动问题中，这一点已为前面几章大量例子所说明，譬如参看 (1.2)，(1.4)，(1.6)，(3.24)，(3.27)，(7.47)，(8.38)，(8.48)，(9.18)，以及 (9.40) 各式。虽然 Stewartson (1957，1961) 在各种粘性流问题中，遇到了 log log 项，但这种情况极少。

产生对数项有种种原因。在某些问题中，这自然是由于柱对称的缘故。譬如，细长体理论 (9.8 节) 就是如此。这时，

对数描述了像 Bessel 函数 K_0，以及出现在更完整的理论中的反双曲函数 Sech^{-1} 在对称轴附近的主要奇性。

出现对数项的另一个普遍原因是小指数。式(4.50)就是一个例子，它说明了展开式为什么是非一致有效的。正如4.7节双凸翼型那样，这种情况总发生在方程为椭圆型性质的小转角附近。如果我们深信这是一个正确的判断，就可以直接用近似整数幂来代替对数，从而使其解成为一致有效的(习题9.1；Munson 1964)。

在粘性流的逆坐标展开时，似乎常常要有对数项，以保证涡量的指数型衰减(7.11节)。在别的问题中，出现对数项的原因更不清楚，它们之中很多是奇异摄动问题。人们只能从哲理上推断：因为分数幂的描述方式不能包罗万象，而对数函数是仅次于幂函数的、最简单的函数。

后者的典型展开式从摄动量的简单幂开始，其对数仅线性地出现在第二、三、甚至第五项中，此后，对数逐步递增的整数次幂有规则地出现(虽然有时仅每隔几步出现一次)。在奇异摄动问题中，譬如说内展开式中有对数项，这就迫使它们通过各项阶次的变化(发生在把内变量写成外变量时)在下一步出现在外展开中。

于是，当对数项首次出现在高阶项中时，必定还伴随着摄动量同一幂次的代数项。对数项比代数项容易计算得多，因为它满足齐次微分方程。但是，在逐次近似过程中，必须把两项合在一起，作为单独的一步。改变摄动量(3.1节)就把一个常数从对数项转移到代数项中来，从这一事实可见，这两项显然是紧密相关的。

对于摄动量实际数值而言，它的对数值同一差别不大，以致代数项在数学上虽然量阶较小，实际数值却要更大些。而且，经验告诉我们，这两项的符号必定相反，而且它们的和往

往要比单独每一项要小得多，所以只保留对数项可能使准确度要差一些。椭圆机翼升力的展开式(1.6)就是一例。对于 $A=6.37$，得出

$$\frac{dC_l}{d\alpha}=2\pi(1-0.314-0.074+0.088+\cdots) \quad (10.16)$$

而 Krienes (1940) 计算的准确值为 4.55。两项近似的误差为 6%，对数项使误差增加到 15%，而代数项又把误差减少到 3%。所以，如在式(1.2)和(1.4)那样的级数中，最后一项虽然有理论意义，但只有在算出了下一项以后，它才有实际价值。同样的提法适用于对数的 N 次幂项，必须把它同包含对数低次幂的 N 项伴随项归并成一项。

在 8.6 节中，我们已经看到，对数项的出现可以严重地限制摄动级数的适用范围，到下面的 10.7 节中，我们再来讨论这个问题。

10.6 级数的改进；自然坐标

人们只能计算一个摄动级数的几项，通常不超过两项或三项，几乎从来没有超过七项的(参看注 15)。所得到的级数往往收敛得很慢，甚至是发散的。但是，寥寥几项却包含着研究人员要努力取得的大量信息。

Shanks (1955) 在一篇令人鼓舞的文章里，有说服力地提出了这一观点。他举出了很多使人惊异的例子，其中有几个来自流体力学。下述数项级数是一个简单的例子：

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\cdots\right) \quad (10.17)$$

这个级数是收敛的，但速度慢得令人厌烦。下表第二列所示

的七项部分和仅准确到一位有效数字。要达到六位数字的精度，得计算 400000 项。下列表格表明，前七项实际上却包含着 π 的六位以上有效数字的信息。

n	S_n	$e_1(S_n)$	$e_1^2(S_n)$	$e_1^3(S_n)$
1	4.0000000			
2	2.6666667	3.1666667		
3	3.4666667	3.1333333	3.1421053	
4	2.8952381	3.1452381	3.1414502	3.1415993 (10.18)
5	3.3396825	3.1396825	3.1416433	
6	2.9760462	3.1427129		
7	3.2837385			

这里，第三列是由第二列利用以下非线性变换产生的：

$$e_1(S_n)=\frac{S_{n+1}S_{n-1}-S_n^2}{S_{n+1}+S_{n-1}-2S_n} \tag{10.19}$$

重复这个过程得到以下各列，最后一列可准确到六位数字。再一次应用这个变换于较下的对角线，可以进一步提高准确度。Shanks 详尽讨论了上述变换和有关变换。

在摄动问题中，事先考虑适当地选定摄动量，这是重要的(参看 3.1 节)。对于坐标展开来说，就是要使用一组**自然坐标**。它的概念决不像最优坐标那样准确，然而，有些问题显然适合于某一种特定的坐标系。在该坐标系中，通常能给出最令人满意的结果。在具有抛物线形边界的问题中，抛物坐标比笛卡儿坐标或其它坐标更为优越，这就是一个很好的例子。对于半无限平板这一极限情形，第七章曾讨论了边界层理论中抛物坐标系的作用。

第二个例子是，产生旋转抛物面激波的钝体绕流反问题，我们根据

$$x + iy = \frac{1}{2} b [(\xi + i\eta)^2 + 1] \tag{10.20}$$

来引进抛物坐标 ξ，η，使得头部半径为 b 的激波用 $\eta = 1$ 来描述。然后把对称轴附近、符号不规则变化的 Cabannes 级数（3.25）改写成从第二项起符号正负相间的级数（Van Dyke, 1958b）：

$$\frac{\psi}{\xi^2} = \frac{1}{2} - \frac{8}{3}(1-\eta) - \frac{1}{18}(1-\eta)^2 + \frac{155}{54}(1-\eta)^3 - \frac{15235}{648}(1-\eta)^4 + \frac{35416}{243}(1-\eta)^5 - \frac{5656651}{5832}(1-\eta)^6 + \cdots \tag{10.21}$$

图 10.1 说明，这种形式级数的优点之一是，清晰地指明了该展开式在物体头部附近是发散的，但不象笛卡儿坐标中的展开式那么严重。

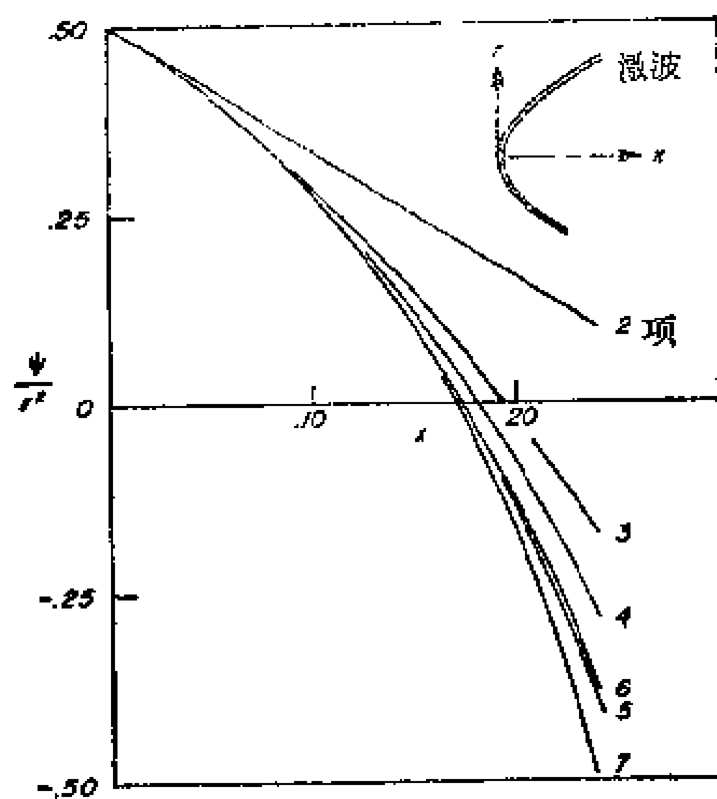
第三个例子是在抛物面上摩阻的 Blasuis 级数（1.5）。把这个级数用抛物坐标来表达［在式（10.20）中用 a 代替 b］，给出（Van Dyke, 1964 a）（参看注 12）

$$\frac{1}{2}\sqrt{R}\, c_f = 1.23259\xi - 1.72643\xi^3 + 2.11376\xi^5 - 2.44192\xi^7 + 2.73149\xi^9 - 2.99343\xi^{11} + \cdots \tag{10.22}$$

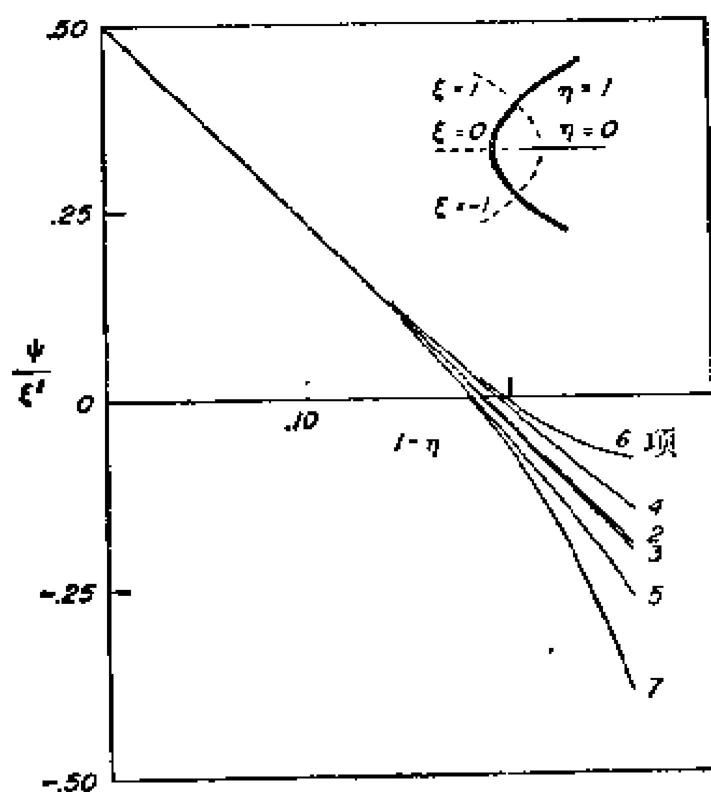
数值试验（习题 10.3）往往可证实具有理论根据的一种猜测，即收敛半径几乎增加了 50%。

10.7 有理分式

把 Shanks 的非线性变换（10.19）应用于幂级数 $1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2 + \cdots$ 的前三项，给出一个简单的**有理分式**



(a)



(b)

图 10.1 $M=2$, $\gamma=7/5$ 时，旋转抛物面激波后对称轴上流函数的级数展开式。(a) 笛卡尔坐标，(b) 抛物坐标。

$$\frac{a+(a^2-b)\varepsilon}{a-b\varepsilon} \tag{10.23}$$

它往往是比原先三项更准确的级数和的近似表达式。譬如说，若原级数是几何级数，不管它是收敛的，还是发散的，上式给出了和的准确表达式。这个事实往往能够解释为什么 Shanks 变换应用于像 (10.17) 这样的级数时，能够取得成功，这个级数显然是"近几何"性质的。

若幂级数有三项以上是已知的，Shanks (1955) 建议构造高阶的有理分式。于是，由圆球阻力 Oseen 近似的 Goldstein 级数 (1.3) 的前五项，得出

$$\frac{R}{6\pi}C_D \approx \frac{73920+66600R+10800R^2}{73920+38880R+689R^2} \tag{10.24}$$

其中，R 是以半径为参考长度的 Reynolds 数。这个公式直到 $R=10$ 仍同更准确的计算结果十分吻合；而原级数当 R 超过 1 时就不能用来计算了。当 $R=-1.97$ 和 -54.4 时，有理分式 (10.24) 的分母等于零。虽然后者太大，没有什么意义；前者却说明原级数 (1.3) 的收敛性受 $R=-2$ 处奇点的限制。这一点似乎是合理的。因为从式 (8.17) (8.18)，显然可以看出，Oseen 流动的自然参数是 $\frac{1}{2}R$，用该参数来表达，奇点位于复平面上 -1 处(参看 3.5 节)(参看注 2，注 15)。

同样地，Van Tuyl (1960) 由 $M=2$ 时，抛物面激波后流动的 Cabannes 级数 (3.25) 和它在抛物坐标中的相应级数 (10.21) 构造了有理分式。从 (10.21) 得

$$\begin{aligned}\frac{2\psi}{\xi^2} \approx \{[1&-0.73878(1-\eta)-37.827(1-\eta)^2\\&+72.098(1-\eta)^3]/[1+4.5946(1-\eta)\\&-13.212(1-\eta)^2-3.5958(1-\eta)^3]\}\end{aligned} \tag{10.25}$$

尽管原级数在物面上是发散的（图 10.1），上述有理分式显然给出了准确到四位有效数字的脱体距离△，同数值解非常一致。由于发现在激波和物体间的流场中，以笛卡儿坐标表达的相应的有理分式会成为无穷大，这个事实充分证实了采用抛物坐标的优越性。

可以把这一方法大胆地应用于 Cabannes 关于钝体问题其它工作．利用当物体突然起动后，以时间幂级数表达的脱体距离的前两项构造一个有理分式．因为当时间无限增长时，它仍是有限的，所以可期望它能估算定常流的脱体距离．当 $M=\infty$，$\gamma=7/5$ 时，给出

$$\frac{\Delta}{a}\approx\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{Ut}{a}\right)}{1+(n-1)\frac{7}{15}\left(\frac{Ut}{a}\right)}\tag{10.26}$$

对于平面流动（$n=2$），它趋近于 0.429 这个值比原来的结果更加接近于圆柱的准确数值 0.377．它的成功，似乎使计算展开式以下各项的工作是值得的．如 3.9 节提到过的，轴对称流同准确结果的一致性较差．这时，有理分式（10.26）给出 0.214，而圆球的数值结果为 0.128．关于把正坐标展开外插到无穷远处的这种方法的其它数值试验，将在习题 10.7 和 10.8 中提出。

需要一种类似于有理分式的方法，以改进如式（1.4）那种含有对数项级数的适用性，但还没有取得明显的结果．我们举一个部分成功的例子．类似于 Prandtl 的结果（9.1 a），椭圆机翼升力的级数（1.6）可以改写成

$$\frac{dC_L}{d\alpha}\approx\frac{2\pi}{1+\frac{2}{A}+\frac{16}{\pi^2}\left(\log\pi A-\frac{7}{8}\right)\frac{1}{A^2}}\tag{10.27}$$

事实上，在 Krienes (1940) 的分析中，这个表达式是自然而然地得到的(常数不同，不正确)。它的准确度大大地改进了，譬如，$A = 2.55$ 时，误差从 11% 减小到 1%。虽然它比原级数在较小的 A 时才趋于无穷，但它仍要趋于无穷，这是这种修正的缺陷(图 9.4)。显然这里还有进一步改进的余地(参看注 13)。

10.8 Euler 变换

上节所用的变换，尽管其用处很明显，但有一个缺点是，由于不了解它的机理，应用时通常带有一定随意性、盲目性。当我们还不知道限制收敛性的奇点的性质和位置时，这是不可避免的。不言而喻，我们也不是总象上述那些例子一样，能取得如此明显的改进的。

如果进一步了解发散的原因，我们就可以处理得更合理些，因而成功的可能性更大些。例如我们虽然不知道奇点的性质，却可能知道它的位置。正如 3.5 节所述，一个仅当摄动量为正实数时有物理意义的幂级数展开式，由于在复平面上别的地方有奇点(通常在负实轴上，若用最自然的方式来选择变量，就在 -1 处)而受到限制，这是在应用力学中经常发生的情况。这可以从最基本的考虑得知，或者象式(10.24)那样，从有理分式得到启示，或者纯粹是推测。

3.5 节提出，在上述情况下，通常可以改用新参数的幂级数来改进原级数：

$$\varepsilon = \frac{s}{1+s} \tag{10.28}$$

其结果是有理分式的特殊情况。Euler 变换的目的是，把 $s = -1$ 处的奇点变换到无穷远处。要是在复平面上没有别的奇点，收敛半径就变成无穷大。Bellman (1955) 讨论了它

在应用力学中的各种应用，我们举出取自第一章的三个例子。

首先，再来考虑抛物面上摩阻的 Blasius 级数式(1.5)。它可变换成更自然的抛物坐标的形式(10.22)，从而得到一些改进(参看注 12)。后一种形式的级数收敛半径显然是一。无疑，这是抛物面保角映射时，在 $\xi = i$ 处有奇点的结果。因为摩阻是 ξ 的奇函数，提出公因子 ξ 后，合适的 Euler 变换应为$\xi^2/(1+\xi^2)$ 的幂级数 Van Dyke (1964a)：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\xi\sqrt{R}\,c_f \sim\ & 1.23259\left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right) - 0.49384\left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right)^2 \\ & - 0.10650\left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right)^3 - 0.04733\left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right)^4 \\ & - 0.02675\left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right)^5 - 0.0172\left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right)^6 \\ & - \cdots \end{aligned} \tag{10.29}$$

现在，它的系数减小得比 $1/n^2$ 还要快。这表明即使在下游远处，级数比 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ 收敛得还要快。如果是这样，当 $\xi = \infty$ 时，又可得到平板解 Blasius 的值 0.664 (7.10 节)。逐级部分和为

$$1.743,\ 1.045,\ 0.894,\ 0.827,\ 0.789,\ 0.765\cdots \tag{10.30}$$

仔细研究后，可以肯定它们确实是收敛于 Blasius 值的。于是，Blasius 级数的收敛半径被伸展为无穷大了。

第二个例子，我们着手改进 Chester 计算的 Newtton 级数(1.7)。它代表了 $M=\infty$ 时，产生抛物面激波的钝体的脱体距离。有理由认为 (Van Dyke, 1958b)，用这种极有希望的方法可得到 $\gamma < 11/5$ 时收敛的展开式，这个 γ 值在实际上是达不到的。然而，收敛速度很慢，令人沮丧。$\gamma = 7/5$ 时，摄动参数$(\gamma-1)/(\gamma+1)$仅为 1/6，级数为

$$\frac{\Delta}{b} = \frac{1}{6}(1 - 0.667 + 0.433 - 0.306 + \cdots) \tag{10.31}$$

这个级数不能用来计算。

根据采用自然坐标的建议（10.6 节），首先把级数改成抛物坐标（10.20）的形式。这样，物体头部处的 η 值由下式求出：

$$1-\eta_0=\frac{3}{8}\varepsilon^2\left(1-\varepsilon+\frac{93}{80}\varepsilon^2-\frac{631}{448}\varepsilon^3+\cdots\right),$$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{8}{3}\,\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \tag{10.32}$$

有种种迹象（包括象在 $\varepsilon=-1$ 处有奇点的几何级数一样摆动）表明，这种选择 ε 的方法是最自然的。作适当的 Euler 变换（10.28）就给出

$$1-\eta_0=\frac{3}{8}\varepsilon\left[\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}+\frac{13}{80}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^3+\frac{177}{2240}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^4+\cdots\right] \tag{10.33}$$

这个结果极其成功。最后两项的系数减小得比它指数的负二次方还要快，这表明甚至在 $\varepsilon=\infty$ 时，收敛得也很快。然而，即使是 $\gamma=\infty$ 也仅相应于 $\varepsilon=1.633$；真实气体的 γ 不能超过 5/3，所以 ε 要小于 0.817，$\varepsilon/(1+\varepsilon)$ 要小于 0.450。

当 $\gamma=7/5$ 时，式（10.33）相继的部分和给出脱体距离为

$$\frac{\Delta}{b}=0.0950,\ 0.0973,\ 0.0978\cdots \tag{10.34}$$

把 Shanks 变换应用于上式，得 0.0979。各种数值计算已经得到 0.0980 到 0.0990 之间的数值。虽然，这个近似是以 γ 接近于一的假设为基础的，但现在可以用于 $\gamma=\infty$ 的情况。这时，它所预言的脱体距离约为 $\gamma=7/5$ 时的三倍。Van Dyke (1958 b)，Van Tuyl (1959) 以前曾用有理分式近似来改进 Chester 级数，但不如现在这个方法成功。

第三个例子，我们考虑圆球 Oseen 阻力的 Goldstein 级数(1.3)．如 10.7 节所述，从理论上或数值计算上来考虑，在 $R = -2$ 处有奇点．这样，用合适的 Euler 变换得到

$$
\begin{aligned}
C_D \sim 3\pi\left(\frac{R}{2+R}\right)^{-1}\Bigg[1 &- \frac{1}{4}\left(\frac{R}{2+R}\right) - \frac{19}{80}\left(\frac{R}{2+R}\right)^2 \\
&- \frac{1}{64}\left(\frac{R}{2+R}\right)^3 - \frac{2459}{134400}\left(\frac{R}{2+R}\right)^4 \\
&- \frac{9469}{537600}\left(\frac{R}{2+R}\right)^5 - \cdots\Bigg] \qquad (10.35)
\end{aligned}
$$

虽然它不象前面两个例子那样明显，但已经有对所有 R 都收敛的样子了．当 $R = 20$ 时，其结果不如有理分式(10.24)准确．但其优点是，$R = \infty$ 时仍然有用；而式(10.24)给出 $C_D = 0$，分子为三次多项式的下一阶有理分式预测的是负阻力．在 $R = \infty$ 时，式(10.35)的逐次部分和为(参看注 2)

$$C_D \approx 9.42,\ 7.07,\ 4.83,\ 4.68,\ 4.51,\ 4.34,\ \cdots \qquad (10.36)$$

虽然它们减小时，不太有规律，但自上而下地趋于 Stewartson (1956) 计算的值 3.33，这不是没有可能的．

10.9 坐标展开式的连接

正如在匹配渐近展开法中那样，匹配连接了在相邻时空区域内有效的、同一极限过程的两个参数展开式．有时也可用类似的方式连接别的展开式，本节和最后一节讨论可以连接的两类问题．

同一问题的不同坐标展开式有时能连接起来．倘若它们都是收敛的幂级数，这就是解析延拓的过程，这一过程在原则上是简单的．实际上的复杂性可以用旋转抛物面激波后流函数的 Cabannes 展开式来说明．在抛物坐标中，它可改写成式(10.21)．该级数仅在从激波到物体距离的 3/4 处收敛(图

10.1)，这是因为在物理上不存在的、延拓的上游流场中有极限线的缘故（Van Dyke，1958 b）. 可以用这个级数计算譬如到离物体距离一半处，再用一个新级数从那里达到物体. 但是，新级数不能直接由原先的截断级数来获得，因为它同原级数是等价的，因而有相同的收敛范围. 弥补的办法（Lewis，1959）是，仅用原先的级数来得到中间位置的新初始数据，再用微分方程计算系数.

人们经常可以对坐标的小量和大量作正展开和逆展开. 后者通常是不收敛的、只是渐近的，还包含对数项和未定常数（3.10 节）. 但是，如果正展开级数的收敛半径为无穷大，两个级数可以连接起来，未定常数也就被找到了. 我们用抛物柱上的边界层为例来证明这一点.

把逆展开式（3.27）用抛物坐标改写成式（10.20）将对数项移到左边，得出

$$\left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{1/2}_{c_f} - 0.399\,\frac{\log(1+\xi^2)}{1+\xi^2} \sim 0.664\left(1+\frac{C_1-1}{1+\xi^4}+\cdots\right) \qquad (10.37)$$

现在，我们利用级数

$$\frac{\log(1+\xi^2)}{1+\xi^2} = \frac{\xi^2}{1+\xi^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right)^3 - \cdots \qquad (10.38)$$

在 $\xi^2 \leqslant \infty$ 时收敛这个事实，由正坐标展开（10.29）来计算同一个量. 同时，利用在抛物面上有 $\xi^2 = 2x$ 这一事实，对所有 $\xi^2 \leqslant \infty$，可得

$$\left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{1/2} c_f - 0.399\,\frac{\log(1+\xi^2)}{1+\xi^2}$$

$$- 1.34\left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right) - 0.499\left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right)^2$$

$$- 0.084\left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right)^3 - 0.034\left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right)^4$$

$$- 0.018\left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right)^5 - 0.011\left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right)^6$$

$$- \cdots \tag{10.39}$$

然后，对于小的 $1/(1+\xi^2)$ 形式地进行展开，并同式(10.37)进行比较，得待定常数 C_1 为 (Van Dyke, 1964 a)

$$C_1 = 1 + (-1.34 + 1.00 + 0.25 + 0.13 + 0.09 + 0.07 + \cdots)/0.664 \approx 1.90 \tag{10.40}$$

我们发现，这个结果确实是无穷级数部分和的近似值．但它是用渐近连接方法，而不是在某个有限的大 ξ 值处用数值拼接方法得到的．若在 $\xi = 6.8$ 处同从头部起进行数值积分的结果相拼接，得 $C_1 = 1.83$．

若正坐标级数只有有限的收敛半径，或者仅是渐近的，要进行这样的连接就不可能了．譬如，半无限平板在前缘附近粘性流动的 Carrier 和 Lin (1948) 的近似式(3.24)就属于后一类情况，它不能合乎逻辑地同高阶边界层展开式相连接(7.11 节)．Imai (1957 a)已在 $\frac{Ux}{\nu} = 1$ 处将摩阻进行拼接，但这一步是否有效还是有疑问的．

10.10 不同参数展开式的连接

对单一参数不同极限过程的展开式(例如，对于小 Reynolds 数及大 Reynolds 数)，要是其中之一是在整个范围内收敛的，它们可以用象上节那样的方法连接起来．虽然式(10.35)很相象，但还举不出这样的例子来．

两个不同参数的展开式，仅当其中之一遵循某个适当的相似律时，才可以用有限项连接起来．这样，便可从 Janzen-Reyleigh 的 M^2 幂级数展开式得到亚声速可压缩流的薄翼展开式或细长体展开式．但要从后者导出前者则是不可能的．

考虑一个最简单的例子，即绕头部半径为 ε^2 的抛物柱 $y=\pm\varepsilon(2x)^{1/2}$ 的平面流动．Imai (1952) 已经计算了速度势的 M^2 幂展开式，它包括了 $(\gamma+1)M^4$ 的项．对于小 ε，形式地展开这个复杂的结果得到

$$\phi \sim x+\varepsilon\eta+\frac{1}{2}M^2\varepsilon\eta^2\frac{\eta-2\varepsilon}{\xi^2+\eta^2}-\frac{1}{4}M^2\varepsilon^2\log\frac{\xi^2+\eta^2}{4\varepsilon^2}$$

$$-\frac{\gamma+1}{16}M^4\varepsilon^2\left[4\frac{\eta^4}{(\xi^2+\eta^2)^2}+\log\frac{\xi^2+\eta^2}{4\varepsilon^2}\right]$$

$$+O[M^4,(\gamma+1)M^6,\varepsilon^3] \qquad (10.41a)$$

这里[参看(10.20)]

$$\begin{aligned}\xi^2&=\sqrt{x^2+y^2}+x+O(\varepsilon^2)\\ \eta^2&=\sqrt{x^2+y^2}-x+O(\varepsilon^2)\end{aligned} \qquad (10.41b)$$

为了把这个关于小 ε 和 M^2 的双重展开式转换成小 ε 的单重展开式，我们必须求 M^2 级数的和．借助于亚声速小扰动理论的二阶相似律 (Van Dyke, 1958a)，简单地完成了这个不大可能完成的工作．按照这个相似律

$$\phi(x,y;M,\gamma,\varepsilon)\sim x+\varepsilon^2 f_1(x,\beta y;\beta\varepsilon)+\varepsilon^4\Big[f_{21}(\ )$$

$$+M^2 f_{22}(\ )+(\gamma+1)\frac{M^4}{\beta^2}f_{23}(\ )\Big]+O(\varepsilon^6) \quad (10.42)$$

其中 $\beta=(1-M^2)^{1/2}$，而每个函数同第一个函数有相同的自变量．前述的双重展开式 (10.41)，仅当它能为

$$\phi\sim x+\frac{\varepsilon}{\beta}\eta-\frac{1}{4}\frac{M^2}{\beta^2}\varepsilon^2\left(4\frac{\eta^2}{\xi^2+\eta^2}+\log\frac{\xi^2+\eta^2}{4\beta^2\varepsilon^2}\right)$$

$$-\frac{\gamma+1}{16}\frac{M^4}{\beta^4}\varepsilon^2\left[4\frac{\eta^4}{(\xi^2+\eta^2)^2}+\log\frac{\xi^2+\eta^2}{4\beta^2\varepsilon^2}\right]$$

$$+O(\varepsilon^3) \tag{10.43a}$$

所代替时，才能同上述相似律相容，其中

$$\begin{aligned}\xi^2&=\sqrt{x^2+\beta^2y^2}+x\\ \eta^2&=\sqrt{x^2+\beta^2y^2}-x\end{aligned} \tag{10.43b}$$

这就是二阶薄翼解。 Van Dyke (1958c) 给出了旋转抛物面相应的连接公式。

习　　题

10.1　用多重尺度法解 Lighthill 方程. 试用多重尺度法求解问题(6.3)，证明其结果不是(6.12c)，而是同样符合要求的不同表达式. 再用 Latta 的合成展开法求解。

10.2　不能匹配的问题. 说明多重尺度法可应用于下述问题：

$$\varepsilon f''+f=1,\ f(0)=f'(0)=1,$$

并得到成功，而匹配渐近方法失效。

10.3　计算收敛半径. 试用 Cauchy 比试法 (ratio test) 计算级数 (1.5)，(10.22) 的收敛半径，并同由位势流的保角映射得到的值 $(s/a)=\pi/4$ 及 $\xi^2=1$ 相比较. 试对级数 (1.7)，(10.21) 进行同样的计算，并同逐次有理近似的奇点作比较(参看注 3)。

10.4　椭圆机翼的升力. 试从式 (1.6) 和 (10.27)，对 $A=8/\pi$ (轴的比值为 2:1) 计算前三项的近似值，估算总和，并同 Krienes 的值 2.99 相比较(参看注 3)。

10.5　抛物柱上摩阻的有理近似. 构造式 (1.5)，(10.22) 的有理近似，并由此获得远下游处的极限值。

10.6　圆柱的临界马赫数. 用 Simasaki 级数 (1.1) 逐次部分和来近似临界 Mach 数(这时，刚达到局部声速)，其值为(参看注 3)

0.4659，0.4206，0.4090，0.4043，0.4020，0.4008…

估算准确值，并同 Simasaki 自己估算的值 0.40 相比较. 计算(1.1)的收敛半径，同 Simasaki 的值 0.50 作比较，再同临界 Mach 数作比较.

考虑应用 Euler 变换下式(1.1)的可能性。

10.7 突然起动的圆柱体头部的摩阻. 试外插(3.23)到时间为无穷大处，并同 Hiemenz 得到的定常流的值相比较 (Schlichting, 1960, p. 78) (参看注 3)。

10.8 突然起动圆柱上的分离现象. 在突然起动，并以速度 U 通过粘性流体、半径为 a 的圆柱上，开始时，其摩阻随时间的变化正比于 (Goldstein 和 Rosenhead, 1936) (参看注 3)

$$1+2.8488\cos\theta\left(\frac{Ut}{a}\right)-\left[0.8795\cos^2\theta-0.2390\sin^2\theta\right]\left(\frac{Ut}{a}\right)^2$$

其中 θ 是从前驻点起度量的角度. 试求分离点的位置，它是时间的函数. 把它外插到时间为无限时，并同已知值 $\theta=109°$ 相比较 (Schlichting, 1960, p. 154)。

注　　释

注 1. 引言

为本书加注是为了使 1964 年的版本能反映最新的学术成就．这些注释概述了这一学科的重要进展，补充了到 1975 年中为止发表的有关参考文献．为了应用于流体力学和其它领域，可在 Nayfeh (1973) 所著的书中找到进一步的参考文献目录．

每条注释说明正文的某一段落或若干段落．在这些段落的页边，用右侧所示的形式标记．只要有可能，就把互相有联系的评述合并成一条，以免使本节内容过于支离破碎．

注 2. 正则摄动级数的计算机延伸

从五十年代末起，把因延伸摄动级数到高阶项而骤增的大量计算工作交付电子数字计算机去完成，这已是切实可行的了．这一方案已被应用于各种流体力学问题，包括本书讨论过的那几个问题在内．Van Dyke (1975, 1976) 综述了上述想法的发展过程，进行具体计算的细节和一些应用．

Hoffman (1974a) 已把 Janzen-Rayleigh 展开(1.3 节)延伸到 M^{12} 阶，而 W. C. Reynolds 则已延伸到 M^{16} 阶(未予发表)．当 $\gamma=\frac{7}{5}$ 时，最大物面速度的结果为

$$\frac{q_{max}}{U}=2.00000+1.16667M^2+2.57833M^4+7.51465M^6$$
$$+25.59041M^8+96.26329M^{10}+387.92345M^{12}$$

$$+ 1646M^{14} + 7450M^{16} + \cdots \qquad (\text{N.1})$$

这里，由于所取的γ不同，M^4 到 M^{10} 的系数与方程 (1.1) 中的系数略有差别．最后两个系数相对说来不够精确，因为这是仅以单精度进行计算的．Hoffman 计算了临界 Mach 数的逐步近似值 (习题 10.6)，并重复应用非线性 Shanks 变换 (方程 10.19)，他估计临界 Mach 数为 0.3983 ± 0.0002．这个数同 Melnik 和 Ives (1971) 用数值方法算出的结果 0.39852 ± 0.0002 是一致的．

Van Dyke (1970) 延伸了以 Reynolds 数幂次表达的 Goldstein 级数 (1.3)，它是用来计算圆球 Oseen 阻力的．他用一分钟机时算到 R^{23} 阶．Domb-Sykes 比试图 (注 15) 表明，该级数的最近奇点实际上在 $R = -2.09086$ 处，而用有理分式进行推测，它在 $R = -2$ 处(225 页)．Euler 变换 (10.8 节) 将这一奇点映射到无穷远处，利用这一变换可得到直至R为无穷时都收敛的新级数．经过进一步运算，重新得出 Stewartson 关于 $R=\infty$ 时阻力系数的值 $C_D = 3.33$ (230 页)．

值得注意的是，上述方法在平面周期水波中的应用．Stokes 在他早年，将解展开成线性化近似的系数 a 的幂级数，从而计算了等深度时水波的二阶近似和深水时的三阶近似．于是他发现，对于随着波一起移动的观察者来说，深水波的波形为

$$y = a\cos x - \frac{1}{2}a^2\cos 2x + \frac{3}{8}a^3\cos 3x + \cdots \qquad (\text{N.2})$$

三十多年后，Stokes 又计算了两项．他还推测，具有 120° 尖峰的最高波形的展开式是收敛的．随后，Wilton 计算深水波到第十阶，但他在第八阶处出了错．Schwartz (1974) 用计算机把级数延伸到第 117 阶．他在分析了系数的性质后指出，由于系数 a 不是波高的单调函数，最高波形的 Stokes 展开式

不收敛．他用级数反演法得到了一个波高幂的展开式，从而消除了上述缺陷，并且还能计算最大波高，准确到五位有效数字．

关于小 Reynolds 数下摄动展开式计算机延伸的一些例子在注 10 中阐述．

注 3. 关于习题的一些说明

在原序中提到，每章末的习题简要地阐述了很多补充知识．我们在这里要指出，其中某些习题随后就在文献中被解决了或推广了；有一些习题可以提得更确切些；若试用别的方法去解一些习题，这也是很有意义的．

习题 2.2. 稍可渗透的圆柱． 若对速度势来提出问题更好些．因为虽可从方程(2.2)导出微小可压缩性效应，而要从该方程得到本问题流函数的相应结果比较麻烦．

习题 2.3. 波状准圆柱． Davey (1961) 用这个解说明为什么驻点可能成为无粘流中的附着鞍点．

习题 2.4. 抛物形速度剖面剪切流中的圆柱． 作为下面更改习题 5.7 的准备，再考虑速度剖面为 $u = U\cosh(\varepsilon^{1/2}y/a)$ 平行流的情况是有益的．

习题 4.5. 双凸翼型的精确解． 原题最后两句话中指出的矛盾，在下面注 4 和该处所列的参考文献中进行讨论．

习题 5.7. 抛物形剖面剪切流中的圆柱． 提出的问题由于非线性产生了不必要的麻烦．如果远上游的平行流用双曲余弦剖面 $u = U\cosh(\varepsilon^{1/2}y/a)$ 来代替抛物形剖面（它们在圆柱表面附近几乎相同），便可更简单地揭示问题的实质．

习题 6.2. Carrier 问题． 如果把 Lighthill 原理减弱为习题 6.1 所述的形式，那么对 x 的表达式中，指数项前的因子可简化为线性形式．处理这个问题的另一条途径是，交换自变量

和因变量的地位，从而把原问题化成关于 $x(f)$ 的正则摄动问题．Carrier 用匹配渐近展开法研究的解要更复杂些．

习题 6.4. Pritulo 方法． Pritulo 用反方法引进变形坐标的想法已为人们重新发现多次（Martin, 1967, Usher, 1968）．Crocco（1972）以气体动力学的若干问题为例，说明了它的效用．

Pritulo（1969）指出，可以对参数进行同样的处理．把参数进行微小的变形抑止非一致性的想法是 Lindstedt（1882）提出来的，这样一来，便可消除天体力学中出现的长期项．正如 111 页所述，Poincaré 推广了这个思想．Nayfeh（1973）称它为变形参数法．Pritulo 以 Donov（1939）关于平面超声速流的四阶薄翼展开为例，告诉我们应怎样用反方法来引进变形参数．变形可压缩因子 $(M^2-1)^{1/2}$ 可以抑止在来流 Mach 数很大时近似表达式的发散性，从而使高 Mach 数时，压力系数展开式中的每一项都保持有界．

习题 8.2. 绕细长抛物面的粘性流动． Veldman（1973）给出了求解过程的第一步．如注 4 所述，由于"禁区"的存在，在第二步渐近匹配原理失效．算到第三步时，要把两项 Stokes 展开同两项 Oseen 展开相匹配，这个问题就避免了．

习题 8.3. 轴对称体的尾流． 该问题是 Viviand 和 Berger（1964）解的第一步．计算二阶近似时，Berger（1968）证明，涡量不再是以指数律衰减的了（146 页）．这就很象半无限平板的边界层的情况那样（7.11 节），需要引进一项对数项，而它的伴随代数项是待定的．Berger 还导出了三阶项及高阶项的形式．这个问题的解以及有关层流尾迹的很多其它工作，在 Berger（1971）著的书中进行了讨论．

习题 8.5. 圆柱的超越小项． 如注 10，注 11 所述，该问题的解包括在 Skinner（1975）的工作中．

习题 9.3. 波形壁上的近平衡流. 应用变形坐标法可以十分简捷地得到一个确定的结果，这是有指导意义的. 但由于解在无穷远处不衰减，所以这个结果是错误的. 参看注 7 和注 6.

习题 10.3. 估算收敛半径. 注 15 所述的 Domb-Sykes 比试图法是估计收敛半径的最佳方法.

习题 10.4. 椭圆机翼的升力. 如注 13 所指出的，方程 (1.6) 中的分数 7/2 应为 9/2，式 (10.27) 中的 7/8 应为 9/8. Medan 已把 Krienes 的结果改进为 2.944 ± 0.004 (用 Medan 方法，1974，计算未发表).

习题 10.6. 圆柱的临界 Mach 数. 如注 2 所述，Simasaki 级数 (1.1) 已用计算机进行延伸，除了别的方法外，还用该延伸的级数精确计算了临界 Mach 数 ($\gamma = 7/5$).

习题10.7. 突然起动圆柱头部的摩擦力. Collins 和 Dennis (1973a) 延伸了时间幂的展开式，前驻点附近，摩擦力的边界层近似 (3.23) 为

$$\tau \sim \rho\nu^{1/2}U^{3/2}x\frac{1}{\sqrt{\pi U_1 t}}[1 + 1.42442(U_1t) - 0.21987(U_1t)^2$$
$$- 0.0127(U_1t)^3 + 0.0254(U_1t)^4 - 0.00566(U_1t)^5$$
$$- 0.00134(U_1t)^6 + 0.00095(U_1t)^7 + \cdots] \qquad \text{(N.3)}$$

习题 10.8. 突然起动圆柱上的分离流. 在一阶边界层近似中：Collins 和 Dennis (1973a) 延伸级数后，导出摩擦力正比于

$$1 + 2.8488\cos\theta(Ut/a) - (0.3202 + 0.5592\cos 2\theta)(Ut/a)^2$$
$$- (0.0767\cos\theta + 0.0246\cos 3\theta)(Ut/a)^3$$
$$+ (0.0661 + 0.1982\cos 2\theta + 0.1427\cos 4\theta)(Ut/a)^4$$
$$- (0.0332\cos\theta + 0.0722\cos 3\theta + 0.0755\cos 5\theta)(Ut/a)^5$$
$$- (0.0105 + 0.0285\cos 2\theta + 0.0414\cos 4\theta$$

$$+ 0.0052\cos 6\theta)(Ut/a)^6 + (0.0117\cos\theta + 0.0207\cos 3\theta + 0.0560\cos 5\theta + 0.0335\cos 7\theta)(Ut/a)^7 + \cdots \quad (N.4)$$

Collins 和 Dennis (1973b) 还用级数截断法对同时间有关的流动进行了数值计算．他们发现，当 (Ut/a) 超过 1.25 以后就不能继续积分了．Telionis 和 Tsahalis (1973; 或参看 Sears 和 Telionis, 1975) 还用有限差分法对边界层方程进行了数值积分．他们在 $(Ut/a)=0.65$ 时，在边界层内找到了一个平方根奇点．它处在定常分离面上 (Goldstein, 1948; Stewartson, 1958)。

注 4. 渐近匹配原理

有时，渐近匹配原理 (4.36, 5.24) 的项数计算法似乎不太明确，这时，就要采用另一种表述方式的法则．譬如说，在如下四种情况下，人们就可能不知道该怎样来计算项数：(i) 渐近序列有间隙(例如，级数是 ε 的整数次幂级数，但 ε^3 项的系数恒等于零)；(ii) 内外展开式的渐近序列是完全不相同的(例如一个展开式是 ε 的整数幂，另一个是 $\varepsilon^{1/2}$ 的幂)；(iii) 出现对数项(例如，$\varepsilon^n\log\varepsilon$ 与 ε^n 同时出现)；(iv) 存在本征解．

所有上述情况，均可采用如下明确表述的法则来消除其不定因素：

"δ 阶外展开的 Δ 阶内展开

$=\Delta$ 阶内展开的 δ 阶外展开" (N.5)

这里，$\Delta(\varepsilon)$ 及 $\delta(\varepsilon)$ 是任意两个标准函数(不一定相同)，它们可以实际上出现或不出现在内、外展开式的渐近序列中．只要知道怎样计算项数时，上述法则自然是同原先的法则 (5.24) 等价的．Fraenkel (1969 b,c, p. 246, 265), Crighton 和 Leppington (1973, p. 317) 还提出了另一些类似的法则，他们也是以量阶为基准，而不是以计算项数为基准的．

作者在提出渐近匹配原理时，只是想提供体现 Kaplun 想法的一种具体手段.作者认为,它是同中间匹配原理(5.29)等价的. 然而，Fraenkel (1969 a, b, c) 在一篇有关匹配步骤的重要研究论文中指出，这两种法则是有很大区别的. 他指出,渐近法则比中间法则更便于使用,因为后者需要寻找一个中间变量的范围,并确定在该范围中重叠的阶数. 此外,渐近法则更经济些,因为在某些重叠较弱的问题中,内展开的某个常数可以用匹配法求出，它所需的外展开的项数要比用中间法则更少些. Fraenkel (1969 b,c, p. 251, 269) 已用几个例子证明,渐近匹配原理可应用于这样的内外展式,其项数少到不能重叠到被匹配项的阶数，这是同人们原先的普遍想法是不同的. 但是 Lagerstrom (1975) 指出，若用修正的边界层——完整的解同外解之差的内展开来进行计算，问题就迎刃而解了.

遗憾的是,当级数包含对数项时,渐近法则可能失效. 这一点，Fraenkel 已经进行了分析. 他发现了法则有两个限制，究竟其中哪一个应列入渐近匹配原理中去，这将取决于对数项出现的方式. 这两个条件决不是在数学上吹毛求疵. 据我们现在所知,这是因为如果忽视了每个限制,就会在求解流体力学的实际问题时出错. 近十年来，用匹配渐近展开法解决的大部分物理问题是应用了渐近法则的,因此,认识到它有这两个限制是有实际意义的:

1. *不要在对数项之间隔断.* Fraenkel 主张统一地取 ε 为内外尺度之比（我们不总是遵守这一习惯的；譬如对圆头翼型,在方程 (4.34) 中取这个比值为 ε^2；对尖头翼型，在方程 (4.48) 中甚至取为 $e^{-1/\varepsilon}$）. 那么,定理 I 的条件 (iii) (Fraenkel 1969a, p. 223) 可以作为一种“戒律”：如果把渐近匹配原理应用到在量阶之差低于 ε 任意次幂的两项间截断的展开

式时，可能会失败．尤其是对于 ε 的幂及其对数构成的级数来说，ε 的确定次幂乘以 $\log\varepsilon$ 的任意次幂的所有项应当作为一项来处理．

Proudman 和 Pearson (1957) 违反了这一"戒律"．如 177 页所述，他们在球的 Stokes 展开式中，计算了 $R^3\log R$ 项，但略去了 R^3 阶的伴随项．在这一例子中，显然没有带来什么危害，因为 Chester 和 Breach (1969) 把级数展开到 R 的更高次幂后，证实了这一项是对的．（他们在这样做时，自己在下一步也违反了 Fraenkel "戒律"）

另一方面，Crighton 和 Leppington (1973) 发现，破坏了上述限制条件，就会导出有限厚度的半无限平板长波绕射问题的错误结果．其外展开形式为

$$\phi \sim \phi_0 + \varepsilon\log\varepsilon\phi_1 + \varepsilon\phi_2 + \varepsilon^2\log^2\varepsilon\phi_3 + \varepsilon^2\log\varepsilon\phi_4 + \varepsilon^2\phi_5 + \cdots \tag{N.6}$$

式中，ε 是板厚同波长之比，因而它就是内外尺度之比．匹配到 $\varepsilon\log\varepsilon$、$\varepsilon$ 阶，可以得到正确的结果；但可以看出匹配到 $\varepsilon^2\log^2\varepsilon$ 阶所得的 ϕ_3 是不正确的，因为它破坏了该线性问题的互易定理．如果把含 ε^2 的三项作为一个整体来进行匹配，就可以克服这一困难．Crighton 和 Leppington 研究了应用带有这一限制条件的匹配原理的技巧．

2. 纯对数情形的"禁区"．正如对于绕圆柱的小 Reynolds 数流动 (8.7 节) 那样，内外展开式以 $\log\varepsilon$ 的负次幂 (或者类似地，以 $\log\varepsilon+k$ 的负次幂) 来表达，这就不会遇到上述限制．Fraenkel (1969 a, p. 226) 发现，这时如果 m，n 不是处于某一"禁区"内，渐近匹配原理 (5.24) 是适用的．该"禁区"在 mn 平面上的形状在求解过程中可以算出．

我们约定内外展开式的第 k 项是 $(\log\varepsilon)^{-k}$ 阶的(使内展开的零阶项不存在)，这样统一了计算项数的方法后有其方便

之处。那么，当外展开的内展开是 $\log x$ 的 N 次多项式的一般情况下，当 $|m-n|\geqslant N$ 时，匹配原理成立。Fraenkel (1969c, p. 276) 以小 Reynolds 数下圆柱的一维模型为例来说明这一限制。这时，"禁区"恰好是 $m=n$ 的直线。所以，我们可以选择如 $n=m+1$ (或 $n=m-1$)，从而使匹配取得成功。

一个更实际的例子是习题 8.2，绕细长抛物面的轴对称流动。对于头部半径为 a 的抛物面，由分离变量法得 Stokes 近似

$$\psi\sim\frac{1}{2}Ua^2\Delta_1(R)\bar{\xi}^2(\bar{\eta}^2\log\bar{\eta}^2-\bar{\eta}^2+1) \qquad (N.7)$$

其中，$\bar{\xi}=\xi/a^{1/2}$，$\bar{\eta}=\eta/a^{1/2}$ 是 Stokes 变量。Oseen 近似的第一项刚好代表均匀流：

$$\psi\sim\frac{1}{2}\frac{\nu^2}{U^2}\tilde{\xi}^2\tilde{\eta}^2 \qquad (N.8)$$

其中 $\tilde{\xi}=\xi/(\nu/U)^{1/2}$，$\tilde{\eta}=\eta/(\nu/U)^{1/2}$。对它们进行匹配可确定 Stokes 近似中的因子 $\Delta_1=(\log^1/R)^{-1}$，其中 Reynolds 数 $R=Ua/\nu$。Veldman (1973) 已经求解到这一步 (Sampson (1891) 首先由旋转椭球的 Stokes 解取极限获得上述结果，但其因子 Δ_1 与 Reynolds 无关，这是不正确的)。

然后，可由 Oseen 展开式计算次项，得到

$$\psi\sim\frac{1}{2}\frac{\nu^2}{U^2}\tilde{\xi}^2(\tilde{\eta}^2+\Delta_1\{A[\tilde{\eta}^2E_1(-\tilde{\eta}^2/2)-2(1-e^{-\tilde{\eta}^2/2})]$$
$$+B\}) \qquad (N.9)$$

这里，E_1 为指数积分 (Veldman 也得出了这一结果，但他不是用匹配法，而是规定表面上的边界条件来求 Oseen 近似的)。若 $A=1$，$B=0$，它差不多可匹配到 (N.7)。但次要项失配，即 $\log\tilde{\eta}=\frac{1}{2}$。因为 $\log\eta$ 项仅以线性形式出现，所

以 $|m-n|\geqslant 1$ 时匹配原理有效．因此，我们现在正好处于“禁区”之中，该“禁区”恰好还是 $m=n$ 这条线．

同圆柱的情形一样（P. 179），Stokes 展开式的高阶项是其首项乘以一个因子．所以，两项展开式为

$$\psi \sim \frac{1}{2} Ua^2[\Delta_1 + c\Delta_1^2 + \cdots]\xi^2(\eta^2 \log \eta^2 - \eta^2 + 1) \quad (N.10)$$

现在，我们已经离开了“禁区”．上式完全可以同 (N.9) 相匹配，从而得到 $A=1$，$B=0$，$c=\gamma-\log 2$．

Davis 和 Werle (1972) 计算了 Stokes 展开式的三阶近似．当 $\xi\to\infty$ 时，即在远下游处，上述结果是正确的；他们认为，对所有 ξ 来说，结果是近似正确的．他们把当地摩阻的数值结果同所得到的展开式进行比较，从而证实了这一结论：

$$[R(1+\xi^2)/\xi](\tau/\rho U^2) = \Delta_1 - (\log 2-\gamma)\Delta_1^2 - [2\log 2 + \pi^2/12 - (\log 2-\gamma)^2]\Delta_1^3 + \cdots \quad (N.11)$$

正如对圆柱的情形一样，若把 Stokes 展开式的前两项合并成一项，可以期望其精确度会更高．这就相当于改变标准函数的定义为 $\Delta_1' = (\log 2/R-\gamma)^{-1}$，使 (N.10) 中的 $c=0$．这时，Davis 和 Werle 近似 (N.11) 具有更简单的形式：

$$[R(1+\xi^2)/\xi](\tau/\rho U^2) = \Delta_1' - (2\log 2+\pi^2/12)\Delta_1'^3 + \cdots \quad (N.12)$$

上式由 Mark (1954) 给出．这一改进确实使它同数值方法的结果多少更一致些，但不如圆柱的情况那么明显（图 N.4）．

在圆柱绕流问题中，方程 (8.47) 的 $\log\rho$ 表示一项 Stokes 展开同二项 Oseen 展开（到 Δ_1 阶的内外展开式）处于“禁区”内，该禁区还是 $m=n$ 这条线．不过，正如 Proudman 和 Pearson (1957) 的所做的那样，我们可以用渐近匹配原理把它们正确地匹配起来（179 页）．这就是说，象上述含有 ε 和 $\log\varepsilon$ 幂的情形一样，违反 Fraenkel“戒律”的不一定会导致错误的

结果(另一方面，一阶 Stokes 展开和 Oseen 展开分别为 0 和 1，它们显然不能匹配)．

Poincaré 型展开式是否必要？Fraenkel 是在内外展开式均为 Poincaré 型的假定下，证明带有限制条件的匹配原理的．也就是说，展开式是式(3.10)形式的，其系数通常与空间、时间变量有关，而与 ε 无关．譬如，

$$f(x;\varepsilon) \sim \sum_{n=1}^{N} c_n(x)\delta_n(\varepsilon) \tag{N.13}$$

Sheer 指出(1971)，尖头翼型的内解(4.49)就不是这种形式．他把习题 4.5 中指出的匹配明显失败的原因归咎于这个事实，如果最终是以内变量而不是以外变量进行比较的．弥补的办法是，用速度的对数来进行计算，这就可以在外展开没有根本性变化的情况下，把内解变成 Poincaré 型的．Sheer 接着证明了将所有无界部分归并到一阶近似中去可以得到一致有效的展开式，这样就没有必要使用为这到同一目的的匹配渐近法了．

Sheer 没有讨论下述明显的事实：如果最终进行比较的是79页上的外变量，那么匹配速度本身就能得到正确的二阶近似(4.53)．是否这同外展开确实是 Poincaré 型这一因素有关呢？我们来研究下一阶近似，匹配三项，将外展开(4.24)的每一项同内展开(4.49)的每一项相匹配(但在式(4.49)中，圆弧翼型的半顶角必须用准确值 $2\tan^{-1}\varepsilon$ 代替薄翼近似$\tan^{-1}2\varepsilon$，因为它们之差虽只是 ε^3 阶的，但由于因子 $e^{-1/\varepsilon}$ 而发生二阶变化)．最后，再用外变量来进行比较，得到

$$U_i = e^{-2/\pi}U\left\{1+\frac{2}{\pi}\varepsilon\left(2-\log 2-\frac{2}{\pi}\right)+\frac{2}{\pi^2}\varepsilon^2\right.$$

$$\times\left[\log^2 2+\left(\frac{4}{\pi}-6\right)\log 2+6-\frac{12}{\pi}+\frac{4}{\pi^2}\right.$$

$$+\frac{\pi}{3}\Big]+\cdots\Big\} \tag{N.14}$$

展开习题 4.5 所引用的精确解，可以证实上式是正确的. 这就促使我们推测：在内展开或外展开中，只要有一个是 Poincaré 型的即可，并假定最终进行匹配的是以相应的内变量或外变量进行的，这时渐近匹配原理依然有效.

不过，解决这一困难的办法似乎要简单得多. 事实上，我们并没有严格地应用 79 页上的渐近匹配原理. 它要求把内展开对小 ε 作展开，并表达成外变量后予以截断. 我们并没有完全进行这样的展开和截断. 因为在方程 (4.52c) (4.52d) 这一步，U_i 的形式还是待定的，因此 (4.52d) 中 ε^2 阶的项中还含有该略去的 ε^3 阶的项.

改进的办法是，用 U_i 的具体展开式来进行计算. (4.51d) 表明它为 $U_i = A + B\varepsilon + \cdots$. 这样一来，匹配原理就完全适用了，习题 4.5 提出的矛盾消除了. 同样地，在下阶近似中使用 $U_i = A + B\varepsilon + C\varepsilon^2 + \cdots$，不管最终的匹配是以外变量或内变量进行的，都能导出正确的结果 (N.14). 所以，至少对这个例子说来，看来展开式不一定都要是 Poincaré 型的. 但是注 5 讨论了一些例子，对它们来说，若不把展开式变成 Poincaré 型的，渐近匹配原理失效.

注 5. 匹配的理论

为了将匹配渐近展开法实际应用于具体问题，通常用极限过程展开式进行讨论，再用渐近匹配原理进行匹配最有效 (注 4)，这是本书和文献中多数例子所遵循的方法. 选用什么技巧当然是各人所好. Cole (1968) 在使用极限过程展开式时，总是用中间极限来进行匹配 (5.8 节). 然而，这种方法显然会掩盖了很多微妙之处，其中某些是有实际意义的.

为了更深入理解匹配的基本思想，以有效区为特征的展开式比极限过程展开式更重要. 在某些情况下，为了构造展开式，它们也是必不可少的. 也就是说，应用极限过程于方程，再求所得到的近似方程的解的想法，比寻求解的极限更为基本。起源于 Kaplun 和 Lagerstrom 著作(Kaplun 和 Lagerstrom, 1957, Kaplun, 1957, Kaplun, 1967) 中的这个观点，已为 Lagerstrom 和 Casten(1972) 完整地提出来了. 读者可在他们的书中，了解到作为匹配渐近展开法基础的那些具有启发性的思想的详尽讨论.

尤其是，Lagerstrom (1967, p. 87, 107) 提出了一个数学模型(不同于注 4 Fraenkel 所提到的问题)，它可以说明小 Reynolds 数圆柱或圆球粘性绕流问题的数学结构：

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{du}{dr}+u\frac{du}{dr}+\delta\left(\frac{du}{dr}\right)^2=0,$$

$$u(\varepsilon)=1,\quad u(\infty)=0 \tag{N.15}$$

这里 n 指空间维数（圆柱取 2；圆球取 3）。对不可压缩流模型，因子 δ 取零；对可压缩流，δ 取 1. 这个问题已为 Lagerstrom (1961, 1970), Cole (1968p. 61), Bush (1971) 和 Lagerstrom 和 Casten (1972) 进行了分析。

不可压缩流模型象真正的不可压缩问题那样(第八章)可用极限过程展开式处理. Oseen 展开是正则摄动问题(参看注 7)。另一方面，可压缩模型的 Stokes 方程是非线性的，它并不包含在 Oseen 方程中. 真实的流动问题情况也是如此 (Lagerstrom, 1964)。

由 Stokes 方程的非线性性质可进一步推出，其解不能由以 r 为外变量，以 r/ε 为内变量的极限过程展开式求得，因为它们根本不能匹配. 人们必须采用以其有效区为特征的、以 $r/\eta(\varepsilon)$ 为内变量的内展开式，这里要求 $\eta\ll 1$, Bush

(1971) 指出,我们可使用将内变量改成 $\log(1/r)/\log(1/\varepsilon)$ 的内极限展开式,这是另一种办法.

湍流边界层的情况相同. Millikan (1939) 从物理上论证了存在着两个不同的区域:在壁面附近是粘性应力起重要作用的薄层,它的外面是仅 Reynolds 应力起重要作用的较厚的外层. 对于不可压缩流, Yajnik (1970) 和 Mellor (1972) 已将这个思想正式表述为 Reynolds 数趋于无穷时的渐近理论. Bush 和 Fendell (1972) 用涡——粘性模型将上述分析推广到高阶近似. 但对于可压缩流, Melnik 和 Grossman (1974) 以及 Adamson 和 Feo (1975) 发现,极限函数展开法不能匹配. 改进的方法还是考虑有效区,或进行可以实现匹配的变数变换.

注 6. 合成展开的其它法则

J. Ellinwood (未发表)已经注意到,加法合成法则(5.32)是基本的法则,它可以用来构成一族非常一般的法则. 若 $F(f)$ 是任一充分光滑的函数(通常没有极点),它的反函数是 $F^{-1}(f)$. 那么,由下式规定合成展开:

$$f_c^{(m,n)} = F^{-1}\{F(f_i^{(m)}) + F(f_0^{(n)}) - F[(f_i^{(m)})_0^{(n)}]\} \quad (N.16)$$

加法合成法则相应于 $F(f) = f$ 的情况,乘法合成法则(5.34)相应于 $F(f) = \log f$ 的情况.

相应于 $F(f) = f^2$, f, $\log f$, $1/f$, $1/f^2$ 的法则产生了对任一确定的自变量而言,近似地均匀分布的单调序列. 这种变通或许可以用来改善它同精确解和实验结果的一致性. 高超声速钝楔绕流的合成解(9.66)由目测法构成,它相应于 $F(f) = \log(\partial f/\partial\psi)$,其中仅积分常数需用目测法确定.

Schneider (1973) 指出,乘法合成法则有分母等于零的危险. 这时,其解在我们感兴趣的区域内变成无穷大,而远远

不是一致有效的. 事实上,他指出,上述情况发生在 107 页上阐述椭圆薄翼的例子中. 乘法合成 (5.36) 在物体表面上是有效的,但在翼型的前(后),甚至在分界流线上不成立.

4.9 节的注释中 (s 为从弦长为 2 的椭圆翼型前缘算起的距离,厚度比为 ε),由保角映射求出 x 轴上速度的精确值为

$$\frac{u}{U}=\frac{1}{1-\varepsilon}\left(1-\varepsilon\frac{1-s}{\sqrt{-2s+s^2+\varepsilon^2}}\right),\quad s<0 \qquad (\text{N.17})$$

将上式在小 ε 时关于 s 及 $S=\varepsilon^2 s$ 进行展开可以分别得到外展开和内展开. 这样,我们便可看到,乘法法则约在前缘前半个头部半径处分母为零. 譬如, 一项内展开的两项外展开的分母是 $1-\varepsilon(-2s)^{-\frac{1}{2}}$, 它在 $s=-\dfrac{\varepsilon^2}{2}$ 处等于零.

同样地, W. Reddal (未发表)在研究习题 9.3 时发现,由两项外展开、一项内展开构成的乘法合成展开, 其分母在 $(1-A)\varepsilon y=2$ 处等于零. 为了避免出这种问题, 尽管乘法合成具有某些值得令人注意的特点, 通常还是宁可采用加法合成 (5.32). 文献中大多是这样做的.

在椭圆翼型的驻点,由两项外展开、一项内展开, 采用按 f^2, f, $\log f$ 函数规定的 Ellinwood 合成展开式分别得出 $\varepsilon^{1/2}$, ε 和 0 阶的速度. 这个例子说明, 不同的合成展开有不同的精确度,其误差可能超过构成合成展开的任一展开式的误差.

注 7. 变形坐标法的适用性

虽然变形坐标法(第六章)现在已被应用于各种流体力学问题(以及其它领域的一些问题),但究竟在什么情况下,这种方法是可靠的, 这个问题没有解决. 数学家仅研究了关于常微分方程的方法 (Comstock, 1972), 但它对于偏微分方程的指导意义极小. 原先用变形坐标法算出的解, 经常有人采用

较普通而又可靠的方法发现它是错的（Jischke. 1970）.

若基本方程是双曲型的，就不会有什么困难，大量事实充分证明了这一点，多数应用就是这种情况. Lin（111 页）巧妙地使用两族特征线取得了成功，Lin 的推广已为 Oswatitsch（1962 a,b）发展成解析特征线法. Oswatisch 及其同事还把这一方法应用于许多气体动力学问题的研究中去（参看 Stuff, 1972）.

但是，这种变形必须是对“原始的”物理变量——速度、压力、温度等，而不是对“衍生的”物理变量，象速度势或流函数来进行的. 譬如，处理超声速薄翼绕流问题时，用扰动速度势(6.28)，而不用流向速度分量的增量（6.30）只能导出方程(6.35) 中正确的变形函数的一半.

变形坐标法一般不适用于抛物型方程，譬如象边界层理论中的方程. 然而，已经证明变形坐标在尾流问题中是有效的. 为了使涡量以指数律衰减(如 145 页所述，看来这个要求是同 Lighthill 原理（6.1）不同的. 但是非指数型的衰减会在下一步导致奇异性），Stewartson（1957）不得不在平板后层流远尾迹的展开式（Goldstein, 1933）中引进对数项. Crane（1959）指出，变形坐标为我们提供了导出上述对数项的另一条值得令人注意的途径. Berger（1968）指出，对于轴对称的远尾迹，变形坐标法同样是成功的.

对于椭圆型方程，情况也不大清楚. 有人认为，圆头翼型不可压缩绕流可用 Lightbill 方法求解的结论不适用于高阶近似(132 页). Bollheimer 和 Weissinger (1968), Hoogstraten (1967) 反对这种说法. 他们指出，只要把两个坐标(实际上，把单个复变量 $z = x + iy$) 都稍予变形即可. 但 Hoogstraten 发现，对于其它头部形状的翼型，困难依然存在.

虽然超声速流的方程是双曲型的，但它们在锥型流的

Mach 锥内却是椭圆型的. Lighthill (1949b) 用变形坐标法确定了锥形激波的位置. Melnik (1965 b) 强调指出,在由超声速前缘出发的平面激波同由顶点出发的近圆锥形激波交汇的三重点处,这种方法失效. 他在文献中指出,可以用匹配渐近展开法把五个不同的边界层接起来(这个问题早先为 Bulakh 在 1961 年研究过).

Melnik 也说明了超声速流中圆锥上涡层是怎样直接同外流相匹配的(他同其它精度稍低的解, 包括 Munson 1964 的工作进行了有意义的比较). 但在高超声速薄激波层近似中,他发现 (1965a), 只有用变形坐标法将物面附近外解的非一致性减小到最低限度后, 才有重叠区存在 (它是不同于引进第三中间区的另一途径). Crocco (1972) 以及 Matveera 和 Sychev (1965) 已将变形坐标法同匹配渐近展开法相结合的思想分别应用于两个气体动力学问题和高超声速边界层的研究中去.

注 8. 大 Reynolds 数下的平板,三重结构

近十年来,人们为了改进大 Reynolds 数下半无限平板和有限平板粘性绕流的解作了很大努力.

Murray (1965, 1967), Brown (1968) 和 Ting (1968) 进一步研究了 7.6 节讨论的本征解. 半无限平板解的优劣,是根据由它所预计的下游远处的摩阻展开式 (7.46), (7.47) 中第一本征解的系数 C_1, 以及前缘附近 Stokes 展开式(3.24) 中的待定常数的准确程度来评价的. 后者 (常数重新作了定义)给出当地摩阻为

$$c_f = AR_x^{-1/2} + BR_x^{1/2} - \frac{\pi}{32} A^2 R_x + \cdots \qquad (N.18)$$

Botta 和 Dijkstra (1970) 改进了 Van de Vooren 和 Di-

Dijkstra (1970) 的方法. Botta 和 Dijkstra 根据从解的解析结构得知的全部性质,以三种不同大小的网格,用有限差分法细致地求解了抛物坐标中的 Navier-Stokes 方程,给出了最可靠的数值.他们只能估计 $2.2 < C_1 < 2.5$, 并求出 $A = 0.75475 \pm 0.00005$, $B = 0.041$ [用较粗的有限差分法 (Yoshizawa, 1970) 求出 $C_1 = 1.6$, $A = 0.748$, $B = 0.044$]. A的这个值说明,在前缘附近的摩阻比 Blasius 的值高 14%.

有限平板. 我们对于有限平板粘性绕流的认识 (7.9 节) 之所以有了根本性的变化, 这是因为 Stewartson (1969) 和 Messiter (1970) 两人同时发现: 在大 Reynolds 数下, 后缘附近的流场有复杂的结构, Stewartson 称它为三重结构 (triple deck). 它在后缘附近形成一个区域, 其范围是 $R^{-3/8}$ 乘以平板长度的量阶. 在上游,它要同经典的 Blasius 边界层解及相应的外解相匹配;在下游,则要同 Goldstein (1930) 分析的两层尾流相匹配. 如图 N.1 所示(该图是 Messiter 和 Stewartson 图的合成),三重结构由三层组成. 在每一层中, Navier-Stokes 方程可用不同方式来近似. 象前缘附近一样, 也存在一个圆形的核心, 在该区域中要用完整的 Navier-Stokes 方程 (这两个圆形区域和另一个大小为 $R^{-1/2}$ 的圆形区域用虚线表示,因为它们只影响高阶近似).

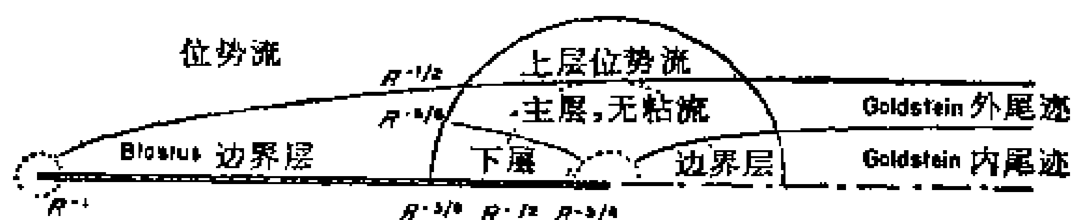


图 N.1 大 Reynolds 数下,有限平板绕流匹配区示意图.
实线表示主区, 虚线表示副区.

这种结构的存在,使 Blasius 阻力要进行一些修正, 其大小是 $R^{-7/8}$ 量阶的, 因而比 Kuo(152 页)和 Imai (153 页)

计算的位移厚度效应更重要些．所以方程 (7.40) 应改成

$$c_F = \frac{1.328}{R^{1/2}} + \frac{2.661}{R^{7/8}} + O\left(\frac{1}{R}, \frac{1}{R^{7/6}}, \frac{1}{R^{5/4}}\right) \quad (N.19)$$

系数 2.661 是 Melnik 和 Chow (1975) 用数值计算得到的；而 Jobe 和 Burgraff 给出 2.694; Veldman 和 Vande Vooren (1974) 发现它等于 2.651 ± 0.003. 在以下各项中，R^{-1} 阶的项是由 $R^{-3/8}$ 阶大小的后缘区及位移厚度效应产生的；$R^{-7/6}$ 阶的项是由大小为 $R^{-1/2}$ 阶的区域产生的；$R^{-5/4}$ 阶的项是由大小为 $R^{-3/4}$ 阶的区域产生的．

最后一个小区域为 Stewartson (1968) 用近似方法加以处理．在这以后，Dijkstra (1974) 用数值方法求解了完整的 Navier-Stokes 方程．他俩都发现，Carrier 和 Lin (1948) 的 Stokes 解 (3.24) 不仅局部适用于前缘，而且也局部地适用于后缘．Dijkstra 计算了当地摩阻平方根奇性项的系数，但不能求出阻力公式 (N.19) 中 $R^{-5/4}$ 阶项的系数．

Jobe 和 Burggraf 发现两项近似公式 (N.19) 同实验测量 (Janour, 1947) 和 Navier-Stokes 方程的数值解 (Dennis 和 Dunwoody, 1966, Dennis 和 Chang, 1969) 符合得相当好，这是出乎意料的．这就表明，以下各项的系数要么比头两项的系数要小得多，要么这些项势必互相抵销．

Brown 和 Stewartson (1970), Riley 和 Stewartson (1969) 以及 Guiraud (1974) 已将三重结构分别推广到有 $R^{-1/16}$ 阶攻角的平板，$R^{-1/4}$ 阶有限后缘角的翼型以及后缘处有一对涡的三维机翼的研究中去．

分离流动． Stewartson 称之为三重结构的多重边界层，是在研究平板和研究超声速流中分离点附近的自由相互作用区时同时发现的．Stewartson 和 Williams (1969) 以及 Neiland (1969) 独立地分析了后面一个问题．他们指出，主要区

域同图 N.1 有相同的尺度．随后，Neiland（1971）将这个局部解同下游分离流的四层区相匹配，发现同实验结果中有压力坪是一致的．

如果高超声速干扰参数 $\chi = M/R^{1/2}$ 很小，那么在高超声速分离点附近，流场仍具有相同的结构． Neiland（1970）则不同，他证明了自由相互作用区是物体长度量阶那样大小的．这取决于从前缘起按距离的高次幂律增长的本征解．Kozlova 和 Mikhailov（1970）指出，对于无限偏航机翼也会发生同样的非唯一性，它可以使无限三角机翼两侧的流场在中心线处光滑地衔接起来．

Sychev（1972）说明了图 N.1 所示的结构是怎样也能适用于绕光滑物体不可压缩流动的分离区的． 有一个大小为 $R^{1/8}$ 阶的逆压梯度作用在长度为 $R^{-3/8}$ 阶的相互作用区，局部流场的极限状态是具有有限曲率的自由流线流动．Sychev 指出，这种结构是同上、下游的流动相容的．Messiter 和 Enlow（1973）也研究了这个问题． Messiter（1975）讨论了这个虽在形式上自洽的模型为什么还是不够完善的原因．这是因为该模型没有考虑回流尾迹的整体结构，譬如，在分离流线下面可以引起无数个旋涡构成的涡系．

Stewartson（1974）综述了所有上述问题及多重结构边界层的问题．

注 9. 最优坐标概念的拓广

Kaplun（1954）关于边界层理论中坐标系作用的研究，仅局限于绕固定壁面物体的不可压缩、定常、平面流动的情况，来流是无旋的，且没有分离．他曾经许诺要在以后的一篇文章中，去掉上述这些限制．但他还没有完成论文就去世了．

Legner（1971）已经证明，构造最优坐标的 Kaplun 法

则 (7.56b) 同样适用于轴对称流，适用于有旋来流，适用于象射流、尾迹、自由对流边界层那样无边壁的边界层，适用于可压缩流，适用于耦合或非耦合的温度边界层. Kaplun 修正定理 (7.50b) 也适用于所有上述流动，这是隐含在定理的论证中的. 此外，Lenger 把构造最优坐标的法则应用到非定常边界层，并用一对 Clebsch 流函数推广到三维边界层. 对所有上述这些情况，他还列举了很多例子.

Kaplun 只是考虑了一阶边界层和由位移厚度产生的外流. 在习题 7.4 中，我们提出了二阶修正定理，它显然也适用于上述的第一组问题. 毫无疑问，它也能推广到第二组问题中去.

Legner 还将 Kaplun 的关于最优坐标的法则推广到任意阶的情况. 如果我们在任一合适的坐标系 x, y 中进行求解，其外展开是式 (7.48a) 的延伸:

$$\phi \sim \phi_1(x, y) + R^{-1/2}\phi_2(x, y) + R^{-1}\phi_3(x, y) + R^{-3/2}\phi_4(x, y) + \cdots \tag{N.20}$$

由 (7.56b) 式推广，可得最优坐标为

$$\begin{aligned} \xi_{opt}(x, y) &= F_1[\phi_2(x, y) + R^{-1/2}\phi_3(x, y) + R^{-1}\phi_4(x, y) + \cdots] \\ \eta_{opt}(x, y) &= \phi_1(x, y)F_2[\phi_2(x, y) + R^{-1/2}\phi_3(x, y) + \cdots] \end{aligned} \tag{N.21}$$

若 R 的对数项出现在外展开中，它们就以显式直接包括在内.

Lenger 在很多例子中证明了二阶及高阶的法则. Davis (1974) 指出，这个法则还不是普遍适用的，这是同 Kaplun 结果的不同之处. 但他为了说明最优坐标在求 Navier-Stokes 方程数值解时的好处，还是采用了这个法则. 另一方面，Fraenkel (未发表) 对由 (N.21) 导出最优坐标的证明提出了疑问. 所以，推广到二阶或高阶近似的问题，还有待于我们去解

决.

图 7.8 的"收缩矩形"坐标是不必要的、人为的选择，其目的是为了说明边界层甚至可能不包括基本外流. 极坐标对半无限平板说来是引起人们兴趣的一种坐标系，但这种坐标也毫无优越性.

注 10. 小 Reynolds 数下绕圆球和圆柱的流动

Chester 和 Breach (1969) 继续 Proudman 和 Pearson (1957) 的分析工作. 经过艰苦的计算，得到了 Reynolds 数 R 更高次幂的项. 这样，他们便把圆球阻力系数的级数 (1.4) 延伸了两项，求出

$$C_D = \frac{6\pi}{R}\left[1 + \frac{3}{8}R + \frac{9}{40}R^2\log R + \frac{9}{40}\left(\gamma + \frac{5}{3}\times\log 2 - \frac{323}{360}\right)R^2 + \frac{27}{80}R^3\log R + O(R^3)\right] \quad (N.22)$$

式中，$\gamma = 0.5722\cdots$是 Euler 常数.

上述结果是令人失望的，因为同实验数据比较表明，其适用范围毫不增大. Chester 和 Breach 的结论是："上述展开式仅在 $0 \leqslant R \leqslant 0.5$ 的范围内有实用价值. 而在此范围内，将上述展开继续进行下去是毫无意义的." 然而，Dennis 和 Walker (1971) 发现，当 R 低于 0.3 时，上式比任何其它渐近解都更加接近于他们用数值计算得到的阻力值.

上述结果有限的用途，这一点与正则摄动的结果不同. 最近，人们发现后者当 Reynolds 数远大于 1 时实际上还是收敛的. 譬如，Kuwahara 和 Imai (1969) 用计算机 (见注 2) 计算了由边界切向运动引起的圆柱内部的定常平面流动，得到了 R 幂级数的八项. 对于三种不同的情况，他们估计约到 $R = 32$ 时，级数还是收敛的. Hoffman (1974b) 还计算了两

个无限大同心圆盘间的相似流动，算到第十七项．他发现，当一个圆盘固定时，直到 $R=15$ 为止，解是收敛的．对于等速反向旋转的情况，直到 $R=42$ 为止，解是收敛的．

在 Chester 和 Breach 文章的附录中，Proudman 认为，他们所得到的级数的有限用途，这是因为 Reynolds 数表达阻力的展开式不适当．他试图把它改写成更恰当的形式．为了使解在 R 大于 1 时也有用，显然有必要把含有 $\log R$ 的项作些改变（见注 15）．

我们可能要问：Chester 和 Breach 得出最后一项的结果是否正确呢？因为他们违反了注 4 所述的 Fraenkel (1969a) 的"戒律"，把 R 幂次相同仅差一个 $\log R$ 因子的项隔断了．可以肯定，他们的解本身说明，Proudman 和 Pearson 在计算 $R^2\log R$ 阶项时略去了 R^2 阶项碰巧结果没有受影响．然而，我们知道，对于半无限薄板的绕射这个比较简单的问题说来，正是由于下一步忽视了 Fraenkel "戒律"而出了错（注 4）．

171 页曾提到过，Stokes 近似是奇异摄动，而 Oseen 展开似乎是正则摄动 [Kaplun (1957) 注意到这是一种巧合，在可压缩流中，Stokes 近似是非线性的 (Lagerstrom，1964)，就不会有这种巧合]．Illingworth 于 1947 年（未发表）计算了圆球绕流的二阶近似．他得到的阻力系数为

$$C_D=\frac{6\pi}{R}\left(1+\frac{3}{8}R+\frac{9}{40}R^2\log R+0.1333R^2\right.$$
$$\left.+\frac{81}{320}R^3\log R-0.0034R^3+\cdots\right)\quad(\mathrm{N}.23)$$

所以，迭代 Oseen 方程的解可以使它同 Navier-Stokes 方程的解相一致的项数从 R 阶延伸到 $R^2\log R$ 阶．毫无疑问，作进一步迭代，一致性会更好．

分离流． Dorrepaal，Ranger，O'Neill (1975) 发现，假定

物体是凹的，Stokes 近似对于预见有限物体的分离现象是绰绰有余的。Ranger（1972）进一步指出，对介于平面壁间的 Jefferey-Hamel 扩张流动，两项 Stokes 展开式可以预计分离 Reynolds 数准确到 3%；对半扩散角为 45° 的渠道，四项展开式的结果可准确到 1～1.5%。这个问题的 Stokes 展开式是正则摄动，它是 Reynolds 数 R 的幂级数。

这就是说，对圆球绕流这个奇异摄动问题来说，就没有那么一致了。虽然如图 8.3，图 8.4 所示，两项 Stokes 展开式是可以满意地描述其驻涡的[它给出分离起始雷诺数为 8（以半径为特征长度），这同由有限差分法解 Navier-Stokes 方程的值 10（Pruppacher，Le Clair 和 Hamielec，1970），同由级数截断法求得的值 10.25（Dennis 和 Walker，1971），同用流场显示技术的观测值 8.5（Payard 和 Coutauccau，1971）差不多相近]。但是，应用 Chester 和 Breach（1969）的解，把分离 Reynolds 数的方程（8.38）延伸后，得到

$$1-\frac{1}{8}R+\frac{9}{40}R^2\left(\log R+\frac{5}{3}\log 2+\gamma+\frac{83}{840}\right)+O(R^3\log R)=0 \qquad (N.24)$$

Ranger（1972）指出，这个方程还是没有实根，把 $R^3\log R$ 的项包括在内依然如此。看来，对数项还需作些改变。

Skinner（1975）的解给出了关于圆柱绕流的相应方程：

$$(\Delta_1-0.87\Delta_1^3+\cdots)-\frac{1}{2}R\left(1-\frac{1}{2}\Delta_1+\cdots\right)-\frac{7}{96}R^2\left(1-\frac{3}{14}\Delta_1+\cdots\right)+O(R^3)=0 \quad (N.25)$$

其中 $\Delta_1=\left(\log 4/R-\gamma+\frac{1}{2}\right)^{-1}$。用两项可得分离时 $R=1.12$，用三项得 $R=1.0$，这个数值可同 Underwood（1969）

用级数截断法计算的值 2.88（以及 172 页上 Yamada 由 Oseen 近似得到的值 1.51）相当．这种粗略的一致性看来是令人满意的，因为我们假定 Δ_1 是小量，而这时的 Δ_1 等于 0.8．

注 11．超越小项

ε 幂级数形式的摄动解不包含象 $e^{-1/\varepsilon}$ 那种指数型衰减的小项．如下的渐近展开式（Olver，1964）是说明这些项在数值计算时可能是重要的一个例子：

$$\int_0^\pi \frac{\cos nt}{t^2+1}\,dt \sim \frac{\pi}{2}e^{-n} + (-1)^{n-1}\left[\frac{2\pi}{(\pi^2+1)^2}\frac{1}{n^2} - 24\pi\frac{\pi^2-1}{(\pi^2+1)^4}\frac{1}{n^4} + \cdots\right]，\text{当 } n\to\infty \text{ 时} \quad (N.26)$$

即使是 $n=10$，指数型衰减的小项仍为总值的 15%．Dingle (1973) 令人信服地论述了需要求"完全的渐近展开式"的例子，它应把可能出现的任意组指数型衰减的小项包括在内．

看来，正则摄动通常没有这种项．譬如，已为计算机延伸到高阶的注 2 和注 10 中所讨论的每个级数，似乎都代表了摄动量的解析函数，它们在复平面上有有限的收敛半径．另一方面，Terril (1973) 指出，对于在大 Reynolds 数下通过多孔圆管层流流动这样的奇异摄动问题，需要用第一组指数型衰减的项来解释解的性质．数值计算表明，当 $R>9.1$ 时，有双重解；当 $2.3<R<9.1$ 时无解．把边界层同无粘核用通常方式进行匹配，只能得到 R^{-1} 次幂的唯一解．但是，若把 e^{-R} 的项包括在内，$R>9.1$ 时就有两个解，$3.3<R<9.1$ 时无解，这同数值计算的结果相当一致．同样地，Adamson 和 Richey (1973) 发现，对于有激波的跨声速喷管流，指数型衰减的小项也是重要的．

对于平面壁间的收缩流动，Bulakh (1964) 已将指数型

衰减的小项包括在边界层解的外展开中，并用精确的 Jeffery-Hamel 解进行校验。他指出，在平面或轴对称驻点流动的高阶边界层解以及其它问题中，也会出现这类项。

在用直接匹配会产生 $\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}$ 或 $\left(\log\frac{K}{\varepsilon}\right)^{-1}$ 幂次方的内外展开式的“纯对数”情形，常常会出现 ε 阶及其高次幂的项。如 183 页所述(参看习题 8.5)，对小 Reynolds 数圆柱绕流，Proudman 和 Pearson (1957) 初步讨论了这类指数型衰减项。Skinner (1975) 系统地研究了上述问题前两组指数型衰减的小项后发现，即使在 $R=0.025$ 时，含 R 的项对于流谱的对称性有很大影响，但对阻力没有贡献。含 R^2 的项延伸了 Kaplun 关于阻力系数的结果 (8.49)，得到

$$C_D \sim \frac{4\pi}{R}\left\{\Delta_1 - 0.87\Delta_1^3 + O(\Delta_1^4) - \frac{1}{32}R^2\left[1-\frac{1}{2}\Delta_1 + O(\Delta_1^2)\right] + O(R^4)\right\} \qquad (N.27)$$

但从图 8.5 显见，至少当 $R>0.4$ 起，它偏离准确值更远了。这无疑是因为它比 Kaplun 展开式中 Δ_1^4 阶的未知项要小的缘故。

注 12. 绕抛物面的粘性流动

在流体力学中，无论是位势流动还是粘性流动，抛物面具有许多简单而又值得令人注意的性质。在 4.6，4.8，4.9，10.6，10.8，10.9 节，我们已经看到，它们是怎样作为较复杂流动的模型，或求解的基础的。

作为半无限平板绕流的推广，注 8 援引了若干组研究人员用数值方法计算的绕抛物柱的轴向层流流动。Dennis 和 Walsh (1971) Davis (1972)，Botta，Dijkstra 和 Veldman (1972)

用有限差分法分别在抛物坐标系内求解了 Navier-Stokes 方程，其 Reynolds 数的范围从相应于平板的零到相应于 Prandtl 边界层近似的无穷．三个解得到了相同的摩阻，相差不到百分之一．一个值得注意的结论是，以前缘附近的摩擦力为代表的二阶边界层理论(图 N.2)没有多大的实际用处．因为当 Reynolds 数减小时，它迅速偏离精确解．

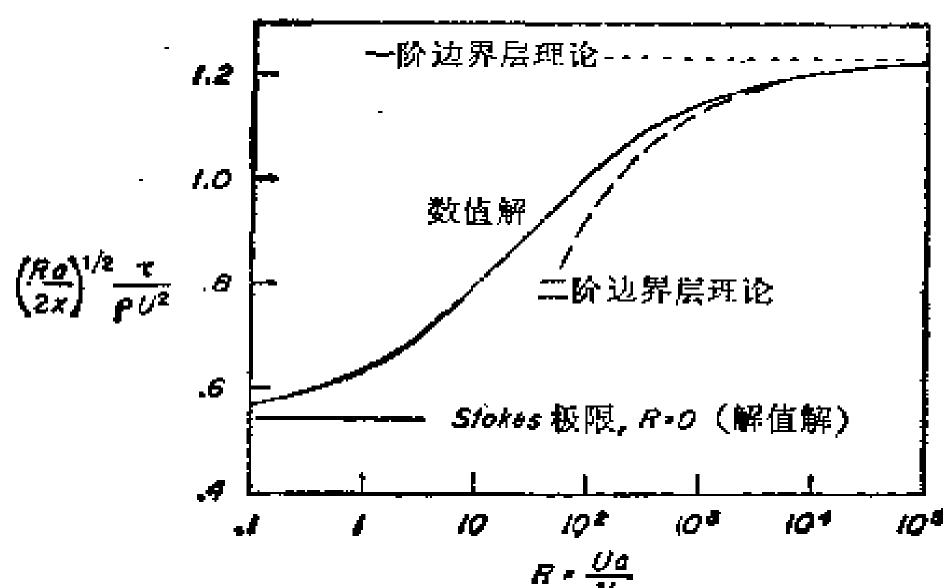


图 N.2 抛物柱前缘的摩擦力．

Werle 和 Davis (1972) 用数值方法计算了轴对称流中旋转抛物面上的边界层．只要摩阻为零时，他们必然会遇到 Goldstein (1948) 的平方根奇点．

注 4 论述了旋转抛物面的轴对称绕流在小 Reynolds 数下的展开式．而 Davis 和 Werle (1972) 以及 Veldman (1973) 则在整个 Reynolds 数范围内，用数值方法求解了 Navier-Stokes 方程．

注 13. 大展弦比升力机翼

Kerney (1972) 发现，Van Dyke (1964b) 把椭圆机翼的方程 (9.15) 中的积分算错了．环量的表达式 (9.18) 应为

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty} = 1 - \frac{2}{A} - \frac{4}{\pi^2}\frac{\log A}{A^2}\frac{3-2z^2}{1-z^2} + \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{A^2}$$

$$\times\left[\frac{5}{2} + \pi^2 + \frac{2z^2}{1-z^2} - \log(1-z^2)\right.$$

$$\left. - \frac{\log 2(1-z^2)}{1-z^2} - \frac{3-2z^2}{1-z^2}\log\frac{\pi}{\sqrt{1-z^2}}\right]$$

$$+ \cdots \tag{N.28}$$

积分上式，关于升力曲线斜率的结果式(1.6)应改为

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = 2\pi\left[1 - \frac{2}{A} - \frac{16}{\pi^2}\frac{\log A}{A^2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{9}{2} + \pi^2\right.\right.$$

$$\left.\left. - 4\log\pi\right)\frac{1}{A^2} + \cdots\right]. \tag{N.29}$$

因此，将它改写成类似于 Prandtl 的结果(9.1a)的形式，式(10.27)应改为

$$\frac{dC_L}{d\alpha} \approx \frac{2\pi}{1 + \frac{2}{A} + \frac{16}{\pi^2}\left(\log\pi A - \frac{9}{8}\right)\frac{1}{A^2}} \tag{N.30}$$

在图 N.3 中，把改正后的结果同升力面理论作了比较. 该图代替了原先的图 9.4，其中 Krienes 的升力面理论结果为 R. T. Medan 用 Medan (1974) 方法计算的精确值:

A	$1/\pi$	$2/\pi$	$8/\pi$	$16/\pi$
$\frac{dC_L}{d\alpha}$	0.496 ± 0.002	0.969 ± 0.002	2.944 ± 0.004	4.151 ± 0.004

以及 Jordan (1971) 计算的圆形机翼 ($A = 4/\pi$) 的值 1.7900230 所代替. 改错以后，大展弦比时的一致性略有改善，但小展弦比时的一致性变差了.

Germain (1967) 提出另一种方法来改进式(1.6)，它在小展弦比 A 时要好一些. 改正了式(1.6)的错误后，它变成

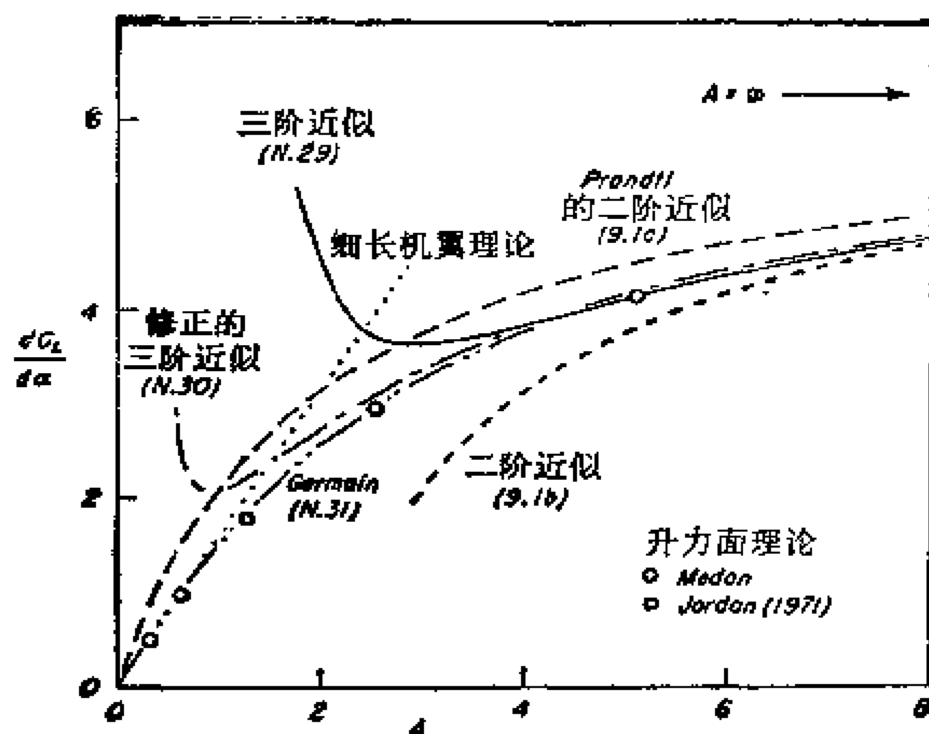


图 N.3 椭圆机翼升力曲线斜率.

$$\frac{dC_L}{d\alpha} \approx \frac{2\pi}{1 + \frac{2}{A} + \frac{16}{\pi^2}\frac{1}{A^2}\log(1 + \pi e^{-9/8}A)} \tag{N.31}$$

图 N.3 表明,这个式子在整个 A 的范围内,近似程度都很好.小展弦比时,它给出 $1.72\,A$,而细长机翼理论的精确极限值为 $(\pi/2)A = 1.57A$.

Thurber (1965) 论述了具有光滑、对称、后掠平面形状的机翼更一般的情形.他发现,这时,展弦比的对数出现在二阶近似中,而不是在三阶近似中.所以,环量不用式(9.15)而用下式来计算:

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty} = 1 + \frac{\log A}{A} f_1(x) + \frac{1}{A} f_2(x) + \cdots \tag{N.32}$$

Thurber 得出了用来计算函数 f_1 和 f_2 的表达式,它们是以机翼平面形状的几何参数来表示的.

Kerney (1971) 及 Tokuda (1971) 各自分析了带有襟翼

的直边缘机翼．但他们的结果不一样，这个矛盾也还没有完全解决。

注 14. 多重尺度法

本书中相对而言，匹配渐近展开法的份量重了些，而多重尺度法的份量轻了些 (10.4 节)．其原因是，写书时多重尺度还刚刚提出来．近十年来，这种方法得到了蓬勃发展，所以，它在流体力学中已是仅次于匹配渐近展开法的重要方法了．要用注释来改变上述那种不平衡的状况是不可能的，所以，我们必须建议读者去参考别的书籍和文献．

Cole (1968) 用一章专门论述他所命名的“两变量展开法”，但没有涉及该方法在偏微分方程中的应用． Kevorkian (1966) 的文章虽很有用，但也有同样的缺陷．较完整地论述这个内容的是 Nayfeh (1973) 所著书的第六章，他把上述方法分为三类：

1. *多变量或导数展开法*．采用无限个逐渐变慢的简单尺度(的头几个尺度)来进行演算，如

$$X_1 = x,\ X_2 = \varepsilon x,\ X_3 = \varepsilon^2 x,\ \cdots \qquad (N.33)$$

2. *两变量展开法*．缓慢的尺度较简单，快变的尺度稍作(线性的)变形，例如，

$$X_1 = x(1 + C_2\varepsilon^2 + C_3\varepsilon^3 + \cdots),\ X_2 = \varepsilon x \qquad (N.34)$$

通常，在 X_1 中不需要 $C_1\varepsilon$ 项，因为它由 X_2 计及．

3. *广义多重尺度法*．缓变尺度简单，快变尺度要作非线性变形．例如，

$$X_1 = \frac{g_1(x)}{\varepsilon} + g_2(x) + \varepsilon g_3(x) + \cdots,\ X_2 = x \quad (N.35)$$

这里还有一些例子说明 $g_2(x)$ 项可以略去．

事实上，流体力学中多数用多重尺度法解决的问题只要

用仅有两个简单尺度(如 x 和 εx)的原始形式就够了。有时，这是严格地正确的；有时这是因为我们只要展开到低阶项即可。Hinch 和 Leal (1973)，Grimshaw (1974) 以及 Nayfeh 和 Tsai (1974) 给出了一些新近的典型的例子。

在文献中，还会遇到别种形式的多重尺度法。Levey 和 Mahony (1968) 稍将缓变尺度变形，而不是将快变尺度变形：

$$X_1 = x,\quad X_2 = \varepsilon x(1 + d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2 + \cdots) \qquad (N.36)$$

Peyret (1970) 将两者都稍作变形：

$$\begin{aligned} X_1 &= x(1 + C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^2 + \cdots) \\ X_2 &= \varepsilon x(1 + d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2 + \cdots) \end{aligned} \qquad (N.37)$$

多重尺度法可以解决凡可用匹配渐近法解决的所有问题，但效率较低；它还可以解决匹配展开不适用的问题，典型的例子包括缓慢调制的振动和波。

某些作者错误地认为，多重尺度法的解在无限大的范围内有效。如果短尺度和长尺度是 x 和 εx，一般说来，它仅在 $x = O(\varepsilon^{-1})$ 的范围内有效。为下述方程支配的“老化弹簧”(Cheng 和 Wu, 1970) 就是一例：

$$\ddot{x} + e^{-\varepsilon t}x = 0 \qquad (N.38)$$

其中，多重尺度法的解仅当 $\varepsilon e^{\varepsilon t/2} \ll 1$ 时成立。

注 15. 级数的分析和改进

本书完成以后，除了 10.6～10.8 节所述的外，作者还知道了改进摄动级数适用性的几种方法。这些方法大多适用于正则摄动问题。这时，其解在形式上是摄动量的幂级数(也许还要除去一个函数因子)。即使通常仅当摄动量为正实数时才有物理意义，我们若在复平面上来研究它，那么复分析的方法就能发挥作用了。

对于幂级数，我们已经有了一整套方法(Van Dyke, 1974)

可用来部分地揭示解的解析结构．然后利用这方面的知识来提高级数的精确度，并扩大它的适用范围．随着日益广泛地用计算机来计算摄动级数的许多项（注 2），上述分析和改进级数的过程为我们提供了处理正则摄动问题的三步方案(Van Dyke, 1976):

i 把常规的计算工作交付电子计算机去完成，从而将级数延伸到高阶项；

ii 考察级数的系数，以便在摄动量的复平面上揭示解的解析结构；

iii 根据解的解析结构变换级数．

至少对于某些简单的问题，这种半数值方法要比有限差分法或其它纯数值计算方法更加有效地利用计算机．它可以在较短的机时内达到较高的精确度．求得的解是摄动量的函数，而不是一些固定的数值．方法的完全成功在于，它从很小的摄动量的展开式出发，再变换级数从而得出在整个有物理意义的范围内有效的精确解．注 2 讨论了两个成功的例子：Schwartz (1974) 改造了 Stokes 级数，使它对最高波幅的水波也收敛．Van Dyke (1970) 把小 Reynolds 数下圆球 Oseen 阻力的 Goldstein 级数作了变换，使 Reynolds 数为无穷时也能精确到三位有效数字．

奇异摄动问题，尤其是含摄动量对数项的问题，常常需要作改进，但还不知道一般的方法．对于“纯对数”的情况，展开式的形式为

$$f(\varepsilon)=\frac{A}{\log(1/\varepsilon)}+\frac{B}{(\log 1/\varepsilon)^2}+\frac{C}{(\log 1/\varepsilon)^3}+\cdots \qquad (N.39)$$

前两项可归并成一项，得到

$$f(\varepsilon)=\frac{A}{\log K/\varepsilon}+\frac{C_3}{(\log 1/\varepsilon)^3}+\cdots \tag{N.40}$$

式中 $K=e^{-B/A}$. 如 181 页上所提到的，Kaplun 选择了这一形式计算了小 Reynolds 数下圆柱阻力的公式(方程 8.49)，而 Proudman 和 Pearson (1957) 使用了第一种形式. 图 N.4 (它应同图 8.5 比较)说明，这一改进在无论那一步都大大地提高了精确度. 在某些线性问题和具有特殊几何形状的问题中，

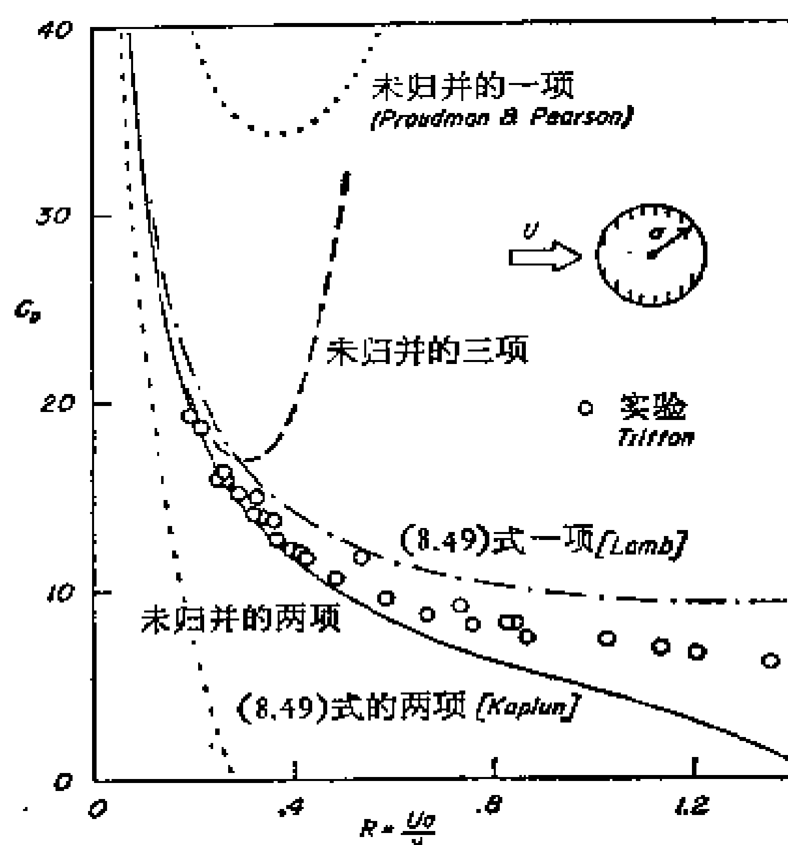


图 N.4 小 Reynolds 数下圆柱阻力的迭进项的影响.

如 Batchelor (1970) 对于绕细长质点的 Stokes 流动所指出的那样，也可用上述方法将无数项归并成一项.

对于 ε 的幂及其对数乘积形式的情形，我们只知道为了进行改进曾尝试过两次：类似于 Prandtl 的一阶结果 (9.1a)，将椭圆机翼升力曲线斜率的级数 (N.29) 改写成 (N.30)，它进一步为 Germain 改写成 (N.31) 的形式；其次是 Proudman

提出将小 Reynolds 数下圆球的阻力级数（N.22）进行改写(注10)。

最近奇点；Domb-Sykes 图． 由幂级数的系数分析其解析结构最有用的方法是，在摄动量的复平面上探讨其最近奇点的性质．首先，最近奇点的方向由系数的符号型来揭示．若级数的项迟早要成为相同符号的（或都是正号或都是负号），如方程 (1.1) 和 (10.29) 的情形，那么奇点在正实轴上．具有这种符号型、性质特别良好的例子是，层流边界层中摩阻的 Howarth (1938) 级数，其逐渐减小的外流速度为 $U = U_0 \times (1 - x/8l)$：

$$
\begin{aligned}
c_f = \frac{1}{4} R_x^{-\frac{1}{2}}[&1.328242 - 1.02054(x/l) - 0.06926(x/l)^2 \\
&- 0.0560(x/l)^3 - 0.0372(x/l)^4 - 0.0272(x/l)^5 \\
&- 0.0212(x/l)^6 - 0.0174(x/l)^7 - 0.0147(x/l)^8 \\
&- \cdots]
\end{aligned}
\qquad (N.41)
$$

象方程 (1.3)，(1.5)，(1.7)，(10.21)，(10.22) 那样，符号型往往是正负交错的，这就表示奇点在负实轴上．有时会遇到复杂的符号型，它同样可以予以说明．

最近奇点的距离，即收敛半径可用 d'Alembert 比试图来计算．按照这一方法，幂级数

$$f(\varepsilon) = \sum_0^\infty c_n \varepsilon^n \qquad (N.42a)$$

的收敛半径为

$$\varepsilon_0 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n-1}}{c_n} \right| \qquad (N.42b)$$

如图 N5.a 上 Howarth 级数 (N.41) 的例子所示，直接作 $|c_{n-1}/c_n|$ 同 n 的关系图用处不大．Domb 和 Sykes (1957) 建议将两个尺度均取其倒数，作 $|c_n/c_{n-1}|$ 同 $1/n$ 的关系图．该

图要求外插到原点，而不是外插到无穷，这是一个明显的好

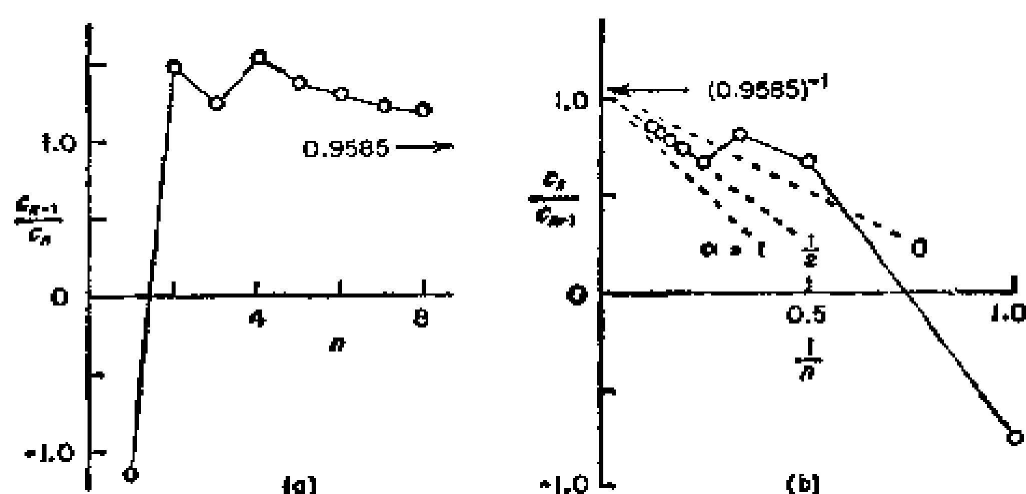


图 N.5 Howarth 级数的比线图 (N.41).
(a) 直接图，(b) Domb-Sykes 图.

处. 更重要的是，外插往往如图 N.5b 那样接近于线性的. 其理由是，若

$$f(\varepsilon)=\text{常数}\times\begin{cases}(\varepsilon_0\pm\varepsilon)^{\alpha}, & \alpha\neq 0,1,2,\cdots\\(\varepsilon_0\pm\varepsilon)^{\alpha}\log(\varepsilon_0\pm\varepsilon), & \alpha=0,1,2,\cdots\end{cases}\qquad\text{(N.43a)}$$

那么

$$\frac{c_n}{c_{n-1}}=\mp\frac{1}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{1+\alpha}{n}\right)\qquad\text{(N.43b)}$$

所以 Domb-Sykes 图是直线. 在很多物理问题中，最近奇点似乎是从代数-对数项开始的，所以该图具有直的渐近线. 然后，收敛半径可方便地用在 $1/n=0$ 轴上截距的倒数来计算. 在图 5b 上，该值显然相应于分离处的奇点，从数值计算 (Leigh 1955) 知道，它在 $x/l=0.9585$ 处. 与此同时，由渐近线的斜率可以确定最近奇点的性质. 所以，图 N.5b 清楚地说明其斜率相应于 $\alpha=\frac{1}{2}$，这同 Goldstein (1948) 和 Stewartson (1958) 的局部分析结果是相一致的. Stewartson 指出，在分离点处有多个奇点，但以平方根奇点为主.

Domb-Sykes 图很少有象本例那样是笔直的。其余较弱、较远的奇点可以使图形发生弯曲、拐折、振荡、成锯齿状、缓慢变化或者变得毫无规则。在 Van Dyke (1974) 的文章中，举出了关于粘性流动各种可能情况的例子，以及收敛半径为零或无穷的例子。Gaunt 和 Guttmann (1974) 在关于晶体点阵模型的热力学部分，阐述了某些改进的方法(这就是我们得以借鉴 Domb-Sykes 图的课题)。

在复平面上研究最近奇点和别的奇点性质的一种截然不同的方法是构造有理分式(10.7 节)(通常称为 Padé 逼近)，并考察其分母的零点(225 页)。用 Padé 逼近来改进级数在物理学家中已经非常普遍了。Baker (1965, 1975), Hunter 和 Baker (1973)以及 Gaunt 和 Guttmann (1974) 著的书都是有价值的参考资料。

注 16. 解决佯谬

匹配渐近展开法在解决长期悬而未决的佯谬中是最突出的。Prandtl 边界层理论有效地解决了 D'Alembert 佯谬。在小 Reynolds 数的另一极端情况，Oseen 阐明的 Stokes 和 Whitehead 佯谬由 Kaplun (1957) 用匹配渐近展开法 (第八章) 重新予以解决。下述三个问题直到用匹配渐近展开法解决以前，"呈现明显的矛盾性质"。如果定义不变，其中每个问题也都可以认为曾经是佯谬。它们象 Stokes 和 Whitehead 佯谬一样，在平面问题的无穷远处都有对数型发散项。

Filon 佯谬。Filon (1928) 用 Oseen 近似研究了柱体远场的定常粘性流动。在二阶近似中，他求得了作为角动量积分的非对称形状的矩，当围线增大时，该量以对数律趋于无穷。Imai (1951) 克服了这个困难。他指出，二阶尾流解中的奇性同尾流外的三阶无粘解相抵消(论证类似于 153 页所述，

Imai 以后用于计算半无限平板的阻力）。Chang (1961) 系统地运用匹配渐近展开法简化了解决 Filons 佯谬的步骤。

高 Froude 数下的滑行面。Green (1936) 计算了弦长为 L 的平板在深水表面上滑行的平面无粘自由流线流动．它的 Froude 数很高，$F=(Ug/l)^{1/2}=1/\varepsilon^2$。Green 近似的缺点是，由于忽略了重力，自由面在对数型无穷远处落下．Rispin (1966) 把 Green 近似作为局部展开式的首项安排在系统的摄动方案中，并同由线性水波理论得到的远场展开式相匹配，从而克服了这一缺陷．他发现，平板附近的展开式从第二步起有 Froude 数的对数项，其形式刚好同半无限平板绕射的展开式相同 (N.6)。Ting 和 Keller (1974) 考虑了由平板甩出的射流同自由面碰撞后，改进了原先的解．

涡环．直线涡可方便地理想化为集中的核，而曲线涡却要使它本身诱导一定的速度，该速度随核半径倒数的增长而以对数律增长．因此，需要引进某种方法来模拟涡环 (Batchlor, 1967, p. 523)。Tung 和 Ting (1967) 克服了这个困难．他们把集中涡环的外解同粘性扩散直线涡的内解相匹配，结果发现，当其核以时间平方根律扩散时，涡环速度以时间对数律减小。Saffman (1970) 纠正了某些代数运算的错误。

层流混合。与上述这些成功的例子不同，我们要指出，86 页上所述“介于两股不同速度的流体间的粘性剪切层之谜”显然还没有为 Ting (1959) 的匹配法解决．Klemp 和 Acrivos (1972) 指出，考虑所有高阶效应后，混合区的侧向位置在其本身宽度量阶的范围内是不确定的。

主 题 索 引

五　　画

六　　画

七　画

八 画

九　画

十　画

十　一　画

十　二　画

十　三　画

十五画以上

其　它

参考文献与作者索引

Abbott, I. H., and von Doenhoff, A. E. (1959). *Theory of Wing Sections.* Dover, New York. [52]

Adamson, T. C., Jr., and Feo, A. (1975). Interaction between a shock wave and a turbulent boundary layer in transonic flow. *SIAM J. Appl. Math.* 29, 121—145. [249]

Adamson, T. C., and Richey, G. K. (1973). Unsteady transonic flows with shock waves in two-dimensional channels. *J. Fluid Mech.* 60, 363—382. [260]

Alden, H. L. (1948). Second approximation to the laminar boundary layer flow over a flat plate. *J. Math. and Phys.* 27, 91—104. [154]

Baker, G. A., Jr. (1965). The theory and application of the Padé approximate method. *Advances in Theoretical Physics,* (K. A. Brueckner, ed.), pp. 1—58. Academic Press, New York and London. [271]

Baker, G. A., Jr. (1975). *Essentials of Padé Approximants.* Academic Press, New York. [271]

Batchelor, G. K. (1956). A proposal concerning laminar wakes behind bluff bodies at large Reynolds number. *J. Fluid Mech.* 1, 388—398. [134]

Batchelor, G. K., (1967). *An Introduction to Fluid Dynamics.* Cambridge Univ. Press, London and New York. [272]

Batchelor, G. K., (1970). Slender-body theory for particles of arbitrary cross-section in Stokes flow. *J. Fluid Mech.* 44, 419—440. [268]

Bellman, R. (1955). Perturbation methods applied to nonlinear dynamics. *J. Appl. Mech.* 22, 500—502. [227]

Bellman, R. (1964). *Perturbation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering.* Holt, Rinehart & Winston, New York; Dover, New York, 1972. [iii]

Berger, S. A. (1968). The incompressible laminar axisymmetric far wake. *J. Math. and Phys.* 47, 292—309. [239, 251]

Berger, S. A. (1971). *Laminar Wakes.* American Elsevier, New York. [239]

Bollheimer, L., and Weissinger, J. (1968). An application of the "PLK method" to conformal mapping and thin airfoil theory. *Zeit. Flugwiss.* 16, 6—12. [251]

Botta, E. F. F., and Dijkstra, D. (1970). An improved numerical solution of the Navier-Stokes equations for laminar flow past a semi-infinite flat plate. *Rept. Math. Inst. Univ. Groningen* No. TW-80. [252]

Botta, E. F. F., Dijkstra, D., and Veldman, A. E. P. (1972). The numerical solution of the Navier-Stokes equations for laminar, incompressible flow

past a parabolic cylinder. *J. Eng. Math,* **6**, 63—81. [261]

Breach, D. R. (1961). Slow flow past ellipsoids of revolution. *J. Fluid Mech.* **10**, 306—314. [87]

Bretherton, F. P. (1962). Slow viscous motion round a cylinder in a simple shear. *J. Fluid Mech.* 12, 591—613. [86, 87]

Broderick, J. B. (1949). Supersonic flow round pointed bodies of revolution. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 2, 98—120. [32]

Brown, S. N. (1968). An asymptotic expansion for the eigenvalues arising in perturbations about the Blasius solution. *Appl. Sci. Res.* **19**, 111—119. [252]

Brown, S. N., and Stewartson, K. (1970). Trailing-edge stall. *J. Fluid Mech.* **42**, 561—584. [254]

Bulakh, B. M. (1961). On some properties of supersonic conical gas flow. *J. Appl. Math. Mech.* **25**, 708—717. [87, 194, 198, 252]

Bulakh, B. M. (1964). On higher approximations in the boundary-layer theory. *J. Appl. Math. Mech.* **28**, 675—681. [260]

Burns, J. C. (1951). Airscrews at supersonic forward speeds. *Aero. Quart.* **3**, 23—50. [40]

Bush, W. B. (1971). On the Lagerstrom mathematical model for viscous flow at low Reynolds number. *SIAM J. Appl. Math.* **20**, 279—287. [248, 249]

Bush, W. B., and Fendell, F. E. (1972). Asymptotic analysis of turbulent channel and boundary-layer flow. *J. Fluid Mech.* **56**, 657—681. [249]

Cabannes, H. (1951). Etude de l'onde de choc attachée dans les écoulements de révolution. *Rech. Aéro.* No. 24, pp. 17—23. [10, 43]

Cabannes, H. (1953) Études du départ d'un obstacle dans un fluide au repos. *Rech. Aéro.* No. 36, pp. 7—12. [45]

Cabannes, H. (1956). Tables pour la détermination des ondes de choc détachées. *Rech. Aéro.* No. 49, pp. 11—15. [44]

Carrier, G. F. (1954). Boundary layer problems in applied mathematics. *Comm. Pure Appl. Math.* **7**, 11—17. [133]

Carrier, G. F., and Lin, C. C. (1948). On the nature of the boundary layer near the leading edge of a flat plate. *Quart. Appl. Math.* **6**, 63—68. [44, 232, 254]

Chang, I. D. (1961). Navier-Stokes solutions at large distances from a finite body. *J. Math. Mech.* **10**, 811—876. [42, 46, 46, 85, 87, 145, 146, 183, 272]

Cheng H., and Wu, T. T. (1970). An aging spring. *Studies Appl. Math.* **49**, 183—185. [266]

Cheng, H. K. (1962). Hypersonic flows past a yawed circular cone and other pointed bodies. *J. Fluid Mech.* **12**, 169—191. [213]

Chester, W. (1956a). Supersonic flow past a bluff body with a detached shock. Part 1. Twodimensional body. *J. Fluid Mech.* **1**, 353—365. [33]

Chester, W. (1956b). Supersonic flow past a bluff body with a detached shock. Part II. Axisymmetrical body. *J. Fluid Mech.* **1**, 490—496. [7]

Chester, W. (1960). The propagation of shock waves along ducts of varying cross section. *Advances in Appl. Mech.* 6, 119—152. [4]

Chester, W. (1962). On Oseen's approximation. *J. Fluid Mech.* **13**, 557—569. [178]

Chester, W., and Breach, D. R. (1969). On the flow past a sphere at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **37**, 751—760. [243, 257, 259]

Chow, R. R., and Ting, L. (1961). Higher order theory of curved shock. *J. Aerospace Sci.* **28**, 428—430. [87]

Cochran, J. (1962). *A New Approach to Singular Perturbation Problems.* Ph. D. Dissertation. Stanford Univ. [217, 219]

Cole, J. D. (1957). Newtonian flow theory for slender bodies. *J. Aeronaut. Sci.* **24**, 448—455. [24, 24]

Cole, J. D. (1968). *Perturbation Methods in Applied Mathematics.* Blaisedell. Waltham. Mass. [iii, 247, 248, 265]

Cole, J. D., and Kevorkian, J. (1963). Uniformly valid asymptotic approximations for certain non-linear differential equations. *Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics,* (J. P. LaSalle and S. Lefschetz, eds.), pp. 113—120. Academic Press, New York. [217]

Cole, J. D. and Messiter, A. F. (1957). Expansion procedures and similarity laws for transonic flow. I. Slender bodies at zero incidence. *Z. Angew. Math. Phys.* **8**, 1—25. [87]

Coles, D. (1957). The laminar boundary layer near a sonic throat. *Preprints, Heat Transfer Fluid Mech. Inst.*, 1957, pp. 119—137. Stanford Univ. Press, Stanford, California. [86]

Collins, W. M., and Dennis, S. C. R. (1973a). The initial flow past an impulsively started cylinder. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **26**, 53—75. [240, 240]

Collins, W. M., and Dennis, S. C. R. (1973b). Flow past an impulsively started circular cylinder. *J. Fluid Mech.* **60**, 105—127. [241]

Comstock, C. (1972). The Poincaré-Lighthill perturbation technique and its generalizations. *SIAM Rev.* 14, 433—446. [250]

Crane, L. J. (1959). A note on Stewartson's paper "On asymptotic expansions in the theory of boundary layers". *J. Math. and Phys.* **38**, 172—174. [251]

Crighton, D. G., and Leppington, F. G. (1973). Singular perturbation methods in acoustics: diffraction by a plate of finite thickness. *Proc. Roy. Soc.* Ser. **A335**, 313—339. [241, 243]

Crocco, L. (1972). Coordinate perturbation and multiple scale in gasdynamics. *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A272**, 275—301. [239, 252]

Curle, N. (1956). Unsteady two-dimensional flows with free boundaries. I.

General theory II. The incompressible inviscid jet. *Proc. Roy. Soc. Ser.* **A235**, 375—395. [46]

Davey, A. (1961). Boundary-layer flow at a saddle point of attachment. *J. Fluid Mech.* **10**, 593—610. [238]

Davis, R. T. (1972). Numerical solution of the Navier-Stokes equations for symmetric laminar incompressible flow past a parabola. *J. Fluid Mech.* **51**, 417—433. [26.]

Davis, R. T. (1974). A study of the use of optimal coordinates in the solution of the Navier-Stokes equations. *Rept. Dept. Aerospace Eng. Univ. Cincinnati* No AFL. 74—12—14. [256]

Davis, R. T., and Werle, M. J. (1972). Numerical solutions for laminar incompressible flow past a paraboloid of revolution. *AIAA J.* **10**, 1224—1230. [245, 262]

Dennis, S. C. R., and Chang, G.-Z. (1969). Numerical integration of the Navier-Stokes equations for steady two-dimensional flow. *Phys. Fluids, Suppl. II*, **12**, 88—93. [254]

Dennis, S. C. R., and Dunwoody, J. (1966). The steady flow of a viscous fluid past a flat plate. *J. Fluid Mech.* **24**, 577—595. [254]

Dennis, S. C. R., and Walker, J. D. A. (1971). Calculation of the steady flow past a sphere at low and moderate Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **48**, 771—789. [257, 259]

Dennis, S. C. R., and Walsh, J. D. (1971). Numerical solutions for steady symmetric viscous flow past a parabolic cylinder in a uniform stream. *J. Fluid Mech.* **50**, 801—814. [261]

Dijkstra, D. (1974). The solution of the Navier-Stokes equations near the trailing edge of a flat plate. Doctoral Dissertation. Univ. Groningen. Nova Press. Groningen. [254]

Dingle, R. B. (1973). *Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation*. Academic Press. London and New York. [260]

Domb, C., and Sykes, M. F. (1957). On the susceptibility of a ferromagnetic above the Curie point. *Proc. Roy. Soc. Ser.* **A240**, 214—228. [269]

Donov, A. E. (1939). A flat wing with sharp edges in a supersonic stream. *N. N. A. C. A. Tech. Memo.* No. 1394(1956); transl. from *Izv. Akad. Nauk SSSR*, 603—626. [239]

Dorrepaal., M., Ranger, K. B., and O'Neill, M. E. (1975). Stokes flow past a body with a re-entry region. To be published. [258]

Eckhaus, W. (1973). *Matched Asymptotic Expansions and Singular Perturbations.* North Holland. Amsterdam and London; American Elsevier, New York. [iii]

Erdélyi, A. (1956). *Asymptotic Expansions.* Dover, New York. [29, 37]

Erdélyi, A. (1961). An expansion procedure for singular perturbations. *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* **95**, 651—672. [93]

Ferri, A. (1950). Supersonic flow around circular cones at angles of attack. *Tech. Note N. A. C. A.* No. 2236. [92]

Ferri, A., Ness, N., and Kaplita, T. T. (1953). Supersonic flow over conical bodies without axial symmetry. *J. Aeronaut. Sci.* **20**, 563—571. [10]

Filon, L. G. N. (1928). On the second approximation to the "Oseen" solution for the motion of a viscous fluid. *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A227**, 93—135. [271]

Fraenkel, L. E. (1969a). On the method of matched asymptotic expansions. Part I: A matching principle. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **65**, 209—231. [242, 242, 243, 258]

Fraenkel, L. E. (1969b). On the method of matched asymptotic expansions. Part II: Some applications of the composite series. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **65**, 233—261. [241, 242, 242]

Fraenkel, L. E. (1969c). On the method of matched asymptotic expansions. Part III: Two boundary-value problems. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **65**, 263—284. [241, 242, 242, 244]

Fraenkel, L. E., and Watson, R. (1964). The formulation of a uniform approximation for thin conical wings with sonic leading edges. *Proc. Symp. Transsonicum* (K. Oswatitsch, ed.), pp. 249—263. Springer-Verlag, Berlin. [87]

Friedrichs, K. O. (1942). Theory of viscous fluids. *Fluid Dynamics*, Chapter 4. Brown Univ. [88]

Friedrichs, K. O. (1948). Formation and decay of shock waves. *Comm. Pure Appl. Math.* **1**, 211—245. [123]

Friedrichs, K. O. (1953). *Special Topics in Fluid Dynamics*, pp. 120—130, New York Univ. [86, 185]

Friedrichs, K. O. (1954). *Special Topics in Analysis*. New York Univ. [86]

Friedrichs, K. O. (1955). Asymptotic phenomena in mathematical physics. *Bull. Amer. Math. Soc.* **61**, 485—504. [50]

Garabedian, P. R. (1956). Calculation of axially symmetric cavities and jets. *Pacific J. Math.* **6**, 611—684. [3, 25]

Gaunt, D. S., and Guttmann, A. J. (1974). Series expansions: analysis of coefficients. *Phase Transitions and Critical Phenomena*, (C. Domb and M. S. Green, eds.) **3**, Academic Press, New York. [271, 271]

Germain, P. (1967). Recent evolution in problems and methods in aerodynamics. *J. Roy. Aeronaut. Soc.* **71**, 673—691. [263]

Germain, P., and Guiraud, J.-P. (1960). Conditions de choc dans un fluide doué de coefficients de viscosité et de conductibilité thermique faibles mais non nuls. *C. R. Acad. Sci. Paris* **250**, 1965—1967. [87]

Germain, P., and Guiraud, J.-P. (1962). Conditions de choc et structure des ondes de choc dans un écoulement stationnaire de fluide dissipatif. *O. N. E. R. A. Publ.* No. 105. [87]

Goldstein, S. (1929). The steady flow of viscous fluid past a fixed spherical obstacle at small Reynolds numbers. *Proc. Roy. Soc. Ser.* **A123**, 225—235. [6, 172]

Goldstein, S. (1930). Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics. *Proc Camb Phil. Soc.* **26**, 1—30. [253]

Goldstein, S. (1933). On the two-dimensional steady flow of a viscous fluid behind a solid body.-I. *Proc. Roy. Soc. Ser.* **A142**, 545—562. [251]

Goldstein, S., ed. (1938). *Modern Developments in Fluid Dynamics.* Oxford Univ. Press. London and New York. [135, 145, 168]

Goldstein, S. (1948). On laminar boundary-layer flow near a position of separation. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **1**, 43—69. [241, 262, 270]

Goldstein, S. (1956). Flow of an incompressible viscous fluid along a semi-infinite flat plate. *Tech. Rep. Eng. Res. Inst. Univ. Calif.* No. HE-150 144. [33, 86, 154]

Goldstein, S. (1960). *Lectures on Fluid Mechanics.* Wiley (Interscience). New York. [86, 135, 154, 156]

Goldstein, S., and Rosenhead. L. (1936). Boundary layer growth. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **32**, 392—401. [42, 235]

Green, A. E. (1936). The gliding of a plate on a stream of finite depth. Part II. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **32**, 67—85. [272]

Grimshaw, R. (1974). Internal gravity waves in a slowly varying, dissipative medium. *Geophys. Fluid Dyn.* **6**, 131—148. [266]

Guiraud, J.-P. (1958). Écoulement hypersonique d'un fluide parfait sur une plaque plane comportant un bord d'attaque d'épaisseur finie. *C. R. Acad. Sci. Paris* **246**, 2842—2845. [201]

Guiraud, J.-P. (1974). Écoulement décollé au voisinage du bord de fuite d'une aile mince tridimensionnelle. *J. Mécanique* **13**, 409—432. [254]

Hall, I. M. (1956). The displacement effect of a sphere in a two-dimensional shear flow. *J. Fluid Mech.* **1**, 142—162. [14]

Hancock, G. J. (1953). The self-propulsion of microscopic organisms through liquids. *Proc. Roy. Soc. Ser* **A217**, 96—121. [167]

Hantzsche, W. (1943). Die Prandtl-Glauertsche Näherung als Grundlage für ein Iterations-verfahren zur Berechnung Kompressibler Unterschallströmungen. *Z. Angew. Math. Mech.* **23**, 185—199. [5, 33]

Hantzsche, W., and Wendt, H. (1941). Die laminare Grenzschicht an einem mit Überschall-geschwindigkeit angeströmten nicht angestellten Kreiskegel. *Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung* **1**, 76—77. The laminar boundary layer on a circular cone at zero incidence in a supersonic stream. *Rep. and Trans. British M. A. P. (English Transl.)* No. 276. [10]

Hayes, W. D. (1954). Pseudotransonic similitude and first-order wave structure. *J. Aeronaut. Sci.* **21**, 721—730. [118, 119, 120]

Hayes, W. D. (1955). Second-order pressure law for two-dimensional compres-

sible flow. *J. Aeronaut. Sci.* **22**, 284—286. [85]

Hayes, W. D., and Probstein, R. F. (1959). *Hypersonic Flow Theory*. Academic Press, New York. [4, 24, 25, 136, 203, 203]

Hinch, E. J., and Leal, L. G. (1973). Time-dependent shear flows of a suspension of particles with weak Brownian rotations. *J. Fluid Mech.* **57**, 753—767. [266]

Hoffman, G. H. (1974a). Extension of perturbation series by computer: symmetric subsonic potential flow past a circle. *J. Mécanique* **13**, 433—447. [236]

Hoffman, G. H. (1974b). Extension of perturbation series by computer: viscous flow between two infinite rotating disks. *J. Comp. Phys.* **16**, 240—258. [257]

Hoogstraten, H. W. (1967). Uniformly valid approximations in two-dimensional subsonic thin airfoil theory. *J. Eng. Math.* **1**, 51—65. [251]

Howarth, L. (1938). On the solution of the laminar boundary layer equations. *Proc. Roy. Soc. Ser.* **A164**, 547—579. [269]

Hunter, D. L., and Baker, G. A., Jr. (1973). Methods of series analysis. I. Comparison of current methods used in the theory of critical phenomena. *Phys. Rev.* **B7**, 3346—3376. [271]

Imai, I. (1951). On the asymptotic behaviour of viscous fluid flow at a great distance from a cylindrical body, with special reference to Filon's paradox. *Proc. Roy. Soc. Ser.* **A208**, 487—516. [183, 271]

Imai I. (1952). Application of the M^2-expansion method to the subsonic flow of a compressible fluid past a parabolic cylinder. *Proc. 1st Japan Nat. Cong. Appl. Mech.* pp. 349—352. [233]

Imai, I. (1953). On the asymptotic behaviour of compressible fluid flow at a great distance from a cylinder in the absence of circulation. *J. Phys. Soc. Japan* **8**, 537—544. [46, 46]

Imai, I. (1957a). Second approximation to the laminar boundary-layer flow over a flat plate. *J. Aeronaut. Sci.* **24**, 155—156. [33, 60, 86, 153, 154, 156, 156, 232]

Imai, I. (1957b). Theory of bluff bodies. *Tech. Note Inst. Fluid Dynamics and Appl. Math., Univ. Maryland*, No. BN-104. [25]

Janour, Z. (1947). Resistance of a plate in parallel flow at low Reynolds numbers (transl. from Czech.). *N. A. C. A. Tech. Memo.* No. 1316, 1951. [254]

Janssen, E. (1958). Flow past a flat plate at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **3**, 329—343. [154]

Jeffreys, H. (1926). On the relation to physics of the notion of convergence of series *Philos. Mag.* [7] **2**, 241—244. [34]

Jenson, V. G. (1959). Viscous flow round a sphere at low Reynolds numbers (<40). *Proc. Roy. Soc. Ser.* **A249**, 346—366. [176]

Jischke, M. C. (1970). Asymptotic description of radiating flow near stagnation point. *AIAA J.* **8**, 96—101. [251]

Jobe, C. E., and Burggraf, O. R. (1974). The numerical solution of the asymptotic equations of trailing edge flow. *Proc. Roy. Soc. Ser.* **A340**, 91—111. [254]

Jones, R. T. (1950). Leading-edge singularities in thin-airfoil theory. *J. Aeronaut. Sci.* **17**, 307—310. [61]

Jones, R. T., and Cohen, D. (1960). *High Speed Wing Theory*. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey. [51, 54, 185]

Jordan, P. F. (1971). The parabolic wing tip in subsonic flow. *AIAA paper* No. 71—10; *Air Force Office Sci. Res. Rept.* No. AFOSR-TR-71-0075. [263]

Kaplun, S. (1954). The role of coordinate systems in boundary-layer theory. *Z. Angew. Math. Phys.* **5**, 111—135. [72, 86, 94, 156, 161, 255]

Kaplun, S. (1957). Low Reynolds number flow past a circular cylinder. *J. Math. Mech.* **6**, 595—603. [25, 33, 86, 178, 181, 181, 248, 258, 271]

Kaplun, S. (1967). *Fluid Mechanics and Singular Perturbations*, (P. A. Lagerstrom, L. N. Howard, and C. S. Liu, eds) Academic Press, New York and London. [248]

Kaplun, S., and Lagerstrom, P. A. (1957). Asymptotic expansions of Navier-Stokes solutions for small Reynolds numbers. *J. Math. Mech.* **6**, 585—593. [86, 172, 178, 248]

Kawamura, R., and Tsien, F. H. (1964). Aerodynamic stability derivatives of axisymmetric body moving at hypersonic speeds. *Proc. 3rd Intern. Cong. Aero. Sci.* Spartan Books, Baltimore. [10]

Kelly, R. E. (1962). The final approach to steady, viscous flow near a stagnation point following a change in free stream velocity. *J. Fluid Mech.* **13**, 449—464. [46]

Kerney, K. P. (1971). A theory of the high-aspect-ratio jet flap. *AIAA J.* **9**, 431—435. [264]

Kerney, K. P. (1972). A correction to "Lifting-line theory as a singular perturbation problem". *AIAA J.* **10**, 1683—1684. [262]

Kevorkian, J. (1966). The two variable expansion procedure for the approximate solution of certain nonlinear differential equations. *Lectures in Appl. Math.* **7**, 206—275. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island. [265]

Klemp, J. B., and Acrivos, A. (1972). A note on the laminar mixing of two uniform parallel semi-infinite streams. *J. Fluid Mech.* **55**, 25—30. [272]

Kozlova, I. G., and Mikhailov, V. V. (1970). Strong viscous interaction on triangular and slipping [yawed] wings. *Mekh. Zhidk. Gaza*, No. 6, 94—99; English transl.: *Fluid Dyn.* **5**, 982—986. [255]

Krienes, K. (1940). Die elliptische Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage *Z. Angew. Math. Mech.* **20**, 65—88. The elliptic wing based on

the potential theory. *Tech. Memo. N. A. C. A.* (*English Transl.*) No 971. [221, 227]

Kuo, Y. H. (1953). On the flow of an incompressible viscous past a flat plate at moderate Reynolds numbers. *J. Math and Phys.* **32**, 83—101. [111, 151]

Kuo, Y. H. (1956). Viscous flow along a flat plate moving at high supersonic speeds. *J. Aeronaut. Sci.* **23**, 125—136. [111]

Kuwahara, K., and Imai, I. (1969). Steady, viscous flow within a circular boundary. *Phys. Fluids, Suppl. II*, **12**, 94—101. [257]

Lagerstrom, P. A. (1957). Note on the preceding two papers. *J. Math. Mech.* **6**, 605—606. [86, 100]

Lagerstrom, P. A. (1961). Méthodes asymptotiques pour l'étude des équations de Navier-Stokes. Lecture notes, Institut Henri Poincaré, Paris. [248, 248]

Lagerstrom, P. A. (1964). *Laminar flow theory. High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion* (F. K. Moore, ed.) **4**, 20—285. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. [248, 258]

Lagerstrom, P. A. (1970). Some recent developments in the theory of singular perturbations. *Problems in Analysis: A Symposium in Honor of Salomon Bochner*, 261—271. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. [248]

Lagerstrom, P. A. (1975). Forms of singular asymptotic expansions. Presented at Conf. on New Directions in Singular Perturbations, Flagstaff, Ariz. To be published in *Rocky Mtn. J. Math.* [242]

Lagerstrom, P. A., and Casten. R. G. (1972). Basic concepts underlying singular perturbation techniques. *SIAM Rev.* **14**, 63—120. [248, 248]

Lagerstrom, P. A., and Cole, J. D. (1955). Examples illustrating expansion procedures for the Navier-Stokes equations. *J. Rat. Mech. Anal.* **4**, 817—882. [72, 86, 94, 134, 146, 178, 183]

Lamb, H. (1911). On the uniform motion of a sphere through a viscous fluid. *Philos. Mag.* [6] **21**, 112—121. [171, 181]

Lamb, H. (1932). *Hydrodynamics*, 6th ed. Cambridge Univ. Press, London and New York. [14, 181]

Latta, G. E. (1951). Singular perturbation problems. Ph. D. Dissertation. Calif. Inst. Tech. [215, 216]

Legner, H. H. (1971). On optimal coordinates and boundary-layer theory. Ph. D. Dissertation. Stanford Univ. [255]

Legras, J. (1951). Application de la méthode de Lighthill à un écoulement plan supersonique. *C. R. Acad. Sci. Paris* **233**, 1005—1008. [111]

Legras, J. (1953). Nouvelles applications de la méthode de Lighthill à l'étude des ondes de choc. *O. N. E. R. A. Publ.* No. 66. [111]

Leigh, D. C. F. (1955). The laminar boundary-layer equation: a method of solution by means of an automatic computer. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **51**,

320—332. [270]

Levey, H. C. (1959). The thickness of cylindrical shocks and the PLK method. *Quart. Appl. Math.* **17**, 77—93. [112, 131]

Levey, H. C., and Mahony, J. J. (1968). Resonance in almost linear systems. *J. Inst. Math. Applic.* **4**, 282—294. [266]

Levinson, N. (1946). On the asymptotic shape of the cavity behind an axially symmetric nose moving through an ideal fluid. I. *Ann. of Math.* (2) **47**, 704—730. [47]

Lewis, G. E. (1959). Two methods using power series for solving analytic initial value problems. Ph. D. Thesis. New York Univ. [231]

Lewis, J. A., and Carrier, G. F. (1949). Some remarks on the flat plate boundary layer. *Quart. Appl. Math.* **7**, 228—234. [183]

Libby, P. A. (1965). Eigenvalues and norms arising in perturbations about the Blasius solution. *AIAA J.* **3**, 2164—2165. [146]

Libby, P. A., and Fox, H. (1963). Some perturbation solutions in laminar boundary-layer theory. Part I. The momentum equation. *J. Fluid Mech.* **17**, 433—449. [146]

Liepmann, H. W., and Puckett, A. E. (1947). *Introduction to Aerodynamics of a Compressible Fluid.* Wiley, New York. [4]

Lighthill, M. J. (1948). The position of the shock-wave in certain aerodynamic problems. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **1**, 309—318. [1, 213]

Lighthill, M. J. (1949a). A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid. *Philos. Mag.* [7] **40**, 1179—1201. [81, 110]

Lighthill, M. J. (1949b). The shock strength in supersonic "conical fields". *Philos. Mag.* [7] **40**, 1202—1223. [111, 194, 197, 198, 214, 252]

Lighthill, M. J. (1951). A new approach to thin aerofoil theory. *Aero. Quart.* **3**, 193—210. [51, 68, 82, 111, 132]

Lighthill, M. J. (1958). On displacement thickness. *J. Fluid Mech.* **4**, 383—392. [148]

Lighthill, M. J. (1961). A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid. *Z. Flugwiss.* **9**, 267—275. [112, 112, 132]

Lin, C. C. (1954). On a perturbation theory based on the method of characteristics. *J. Math. and Phys.* **33**, 117—134. [111, 120]

Lin, T. C., and Schaaf, S. A. (1951). Effect of slip on flow near a stagnation point and in a boundary layer. *Tech. Note N. A. C. A.* No. 2568. [41]

Lindstedt, A. (1882). Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie. *Abh. K. Akad. Wiss.*, St. *Petersburg*, **31**, No. 4. [239]

Mahony, J. J. (1962). An expansion method for singular perturbation problems. *J. Austral. Math. Soc.* **2**, 440—463. [217]

Mark, R. M. (1954). Laminar boundary layers on slender bodies of revolution

in axial flow. *Tech. Memo. Guggenheim Aeronaut. Lab. Calif. Inst. Tech.* No. 21. [245]

Martin, E. D. (1967). Simplified application of Lighthill's uniformization technique using Lagrange expansion formulas. *J. Inst. Math. Applic.* **3**, 16—20. [239]

Matveeva, N. S., and Sychev, V. V. (1965). On the theory of strong interaction of the boundary layer with an inviscid hypersonic flow. *J. Appl. Math. Mech.* **29**, 770—784. [252]

Medan, R. T. (1974). Improvements to the kernel function method of steady, subsonic, lifting surface theory. *NASA TM* No. X-62,327. [240, 263]

Mellor, G. L. (1972). The large Reynolds number, asymptotic theory of turbulent boundary layers. *Int. J. Eng. Sci.* **10**, 851—873. [249]

Melnik, R. E. (1965a). A conical thin-shock-layer theory uniformly valid in the entropy layer. *Rep. Air Force Flight Dyn. Lab.* No. FDL-TDR-64-82. [252]

Melnik, R. E. (1965b). A systematic study of some singular conical flow problems. Ph. D. Dissertation, Polytech. Inst. Brooklyn. [252]

Melnik, R. E., and Chow, R. (1975). Asymptotic theory of two-dimensional trailing edge flows. Aerodynamic Analyses Requiring Advanced Computers. *NASA SP* No. 347. [254]

Melnik, R. E., and Grossman, B. (1974). Analysis of the interaction of a weak normal shock wave with a turbulent boundary layer. *AIAA Paper* No. 74—598. [249]

Melnik, R. E., and Ives, D. C. (1971). Subcritical flows over two-dimensional airfoils by a multistrip method of integral relations. *Proc. 2nd Internat. Conf. Numer. Methods Fluid Dyn., Berkeley. Calif.*, 1970, *Lecture Notes in Physics* 8, 243—251. Springer-Verlag, Berlin and New York. [237]

Messiter, A. F. (1970). Boundary-layer flow near the trailing edge of a flat plate. *SIAM J. Appl. Math.* **18**, 241—257. [253]

Messiter, A. F. (1975). Laminar separation-a local asymptotic flow description for constant pressure downstream. AGARD Symposium on Separated Flows. To be published. [255]

Messiter, A. F., and Enlow, R. L. (1973). A model for laminar boundary-layer flow near a separation point. *SIAM J. Appl. Math.* **25**, 655—670. [255]

Millikan, C. B. (1939). A critical discussion of turbulent flows in channels and circular tubes. *Proc. 5th Internal. Cong. Appl. Mech.*, 386—392. Wiley, New York. [249]

Milne-Thompson, L. M. (1960). *Theoretical Hydrodynamics*. 4th ed. Macmillan, New York. [83, 83]

Mott-Smith, H. M. (1951). The solution of the Boltzmann equation for a shock wave. *Phys. Rev.* **82**, 885—892. [4]

Munk, M. M. (1922). General theory of thin wing sections. *Rep. N. A. C. A.*

No. 142. [80]

Munk, M. M. (1929). *Fluid Dynamics for Aircraft Designers.* Ronald Press, New York. [211]

Munson, A. G. (1964). The vortical layer on an inclined cone. *J. Fluid Mech.* **20**, 625—643. [96, 214, 220, 252]

Murray, J. D. (1961) The boundary layer on a flat plate in a stream with uniform shear. *J. Fluid Mech.* **11**, 309—316. [87, 163]

Murray, J. D. (1965). Incompressible viscous flow past a semi-infinite flat plate. *J. Fluid Mech.* **21**, 337—344. [252]

Murray, J. D. (1967). A simple method for determining asymptotic forms of Navier-Stokes solutions for a class of large Reynolds number flows. *J. Math. and Phys.* **46**, 1—20. [252]

Nayfeh, A. H. (1973). *Perturbation Methods.* Wiley, New York. [iii, 236, 239, 265]

Nayfeh, A. H., and Tsai, M.-S. (1974). Nonlinear acoustic propagation in two-dimensional ducts. *J. Acoust. Soc. Amer.* **55**, 1166—1172. [266]

Neiland, V. Ya. (1969). Theory of laminar boundary layer separation in supersonic flow. *Mekh. Zhidk. Gaza,* No. 4, 53—57; English transl.: *Fluid Dyn.* **4**, 33—35. [254]

Neiland, V. Ya. (1970). Propagation of perturbation upstream with interaction between a hypersonic flow and a boundary layer. *Mekh. Zhidk. Gaza,* No. 4, 40—49; English transl.: *Fluid Dyn.* **5**, 559—566. [255]

Neiland, V. Ya. (1971). Flow behind the boundary layer separation point in a supersonic stream. *Mekh. Zhidk. Gaza,* No. 3, 19—25; English transl.: *Fluid Dyn.* **6**, 378—384. [255]

Olver, F. W. J. (1964). Error bounds for asymptotic expansions, with an application to cylinder functions of large argument. *Asymptotic Solutions of Differential Equations and Their Applications,* (C. A. Wilcox, ed.), 163—183. Wiley, New York. [260]

O'Malley, R. E., Jr. (1968). Topics in Singular Perturbations. *Advances in Math.* **2**, fascicule 4, 365—470. Academic Press, New York and London. [iii]

O'Malley, R. E., Jr. (1974). *Introduction to Singular Perturbations.* Academic Press, New York. [iii]

Oseen, C. W. (1910). Ueber die Stokes'sche Formel, und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik. *Ark. Math. Astronom. Fys.* **6**, No. 29. [170, 171]

Oswatitsch, K. (1956). *Gas Dynamics.* Academic Press, New York. [16]

Oswatitsch, K. (1962a). Die Wellenausbreitung in der Ebene bei kleinen Störungen. *Arch. Mech. Stos.* **14**, 621—637. [251]

Oswatitsch, K. (1962b). Das Ausbreiten von Wellen endlicher Amplitude. *Zeit. Flugwiss.* **10**, 130—138. [251]

Oswatitsch, K., and Berndt, S. B. (1950). Aerodynamic similarity at axisymmetric transonic flow around slender bodies. *KTH Aero TN* **15**. Roy. Inst. Tech., Stockholm. [195, 199]

Oswatitsch, K., and Sjödin, L. (1954). Kegelige Überschallströmung in Schallnähe. *Österreich. Ing.-Arch.* 8, 284—292. [195]

Payard, M., and Coutanceau, M. (1974). Sur l'étude expérimentale de la naissance et de l'évolution du tourbillon attaché à l'arrière d'une sphère qui se déplace, à vitesse uniforme, dans un fluide visqueux, *C. R. Acad. Sci. Paris* **278**, série B, 369—372. [259]

Peyret, R. (1970). Étude de l'écoulement d'un fluide conducteur dans un canal par la méthode des échelles multiples. *J. Mécanique* **9**, 61—97. [266]

Poincaré, H. (1892) *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Vol. 1, Chapter 3. Dover, New York. [111]

Prandtl, L. (1905). Über Flüssigkeiten bei sehr kleiner Reibung. *Verh. III Internat. Math. Kongr., Heidelberg*, pp. 484—491. Teubner, Leipzig. Reprinted: *Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik* (L. Prandtl and A. Betz, eds.). Göttingen, 1927. Motion of fluids with very little viscosity. *Tech. Memo. N. A. C. A. (English Transl.)* No. 452, 1928. [86]

Prandtl, L. (1935). The mechanics of viscous fluids. Division G. *Aerodynamic Theory* (W. F. Durand, ed.), Vol. 3, pp. 34—208. Springer, Berlin. [135, 151]

Prandtl, L., and Tietjens, O. G. (1934). *Applied Hydro- and Aeromechanics*. McGraw-Hill, New York. [62]

Pritulo, M. F. (1962). On the determination of uniformly accurate solutions of differential equations by the method of perturbation of coordinates. *J. Appl. Math. Mech.* **26**, 661—667. [82, 133]

Pritulo, M. F. (1969). The flow past a yawed delta wing. *Fluid Dynamics Transactions*. (W. Fiszdon, P. Kucharcyzk, and W. J. Prosnak, eds.) **4**, 261—275. PWN-Polish Sci. Pubs., Warsaw. [239]

Proudman, I., and Pearson, J. R. A. (1957). Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* **2**, 237—262. [6, 32, 33, 86, 172, 177, 178, 179, 181, 243, 245, 257, 261, 268]

Pruppacher, H. R., Le Clair, B. P., and Hamielec, A. E. (1970). Some relations between drag and flow pattern of viscous flow past a sphere and a cylinder at low and intermediate Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **44**, 781—790. [259]

Ranger, K. B. (1972). The applicability of Stokes expansions to reversed flow. *SIAM J. Appl. Math.* **23**, 325—333. [259, 259]

Riley, N., and Stewartson, K. (1969). Trailing edge flows. *J. Fluid Mech.* **39**, 193—207. [254]

Rispin, P. P. (1967). A singular perturbation method for non-linear water waves past an obstacle. Ph. D. Dissertation. Calif. Inst. Tech. [272]

Rao, P. S. (1956). Supersonic bangs. *Aero. Quart.* **7**, 21—44, 135—155. [111]

Rayleigh, Lord (1916). On the flow of a compressible fluid past an obstacle. *Philos. Mag.* [6] **32**, 1—6. [18]

Rosenhead, L., ed. (1963). *Laminar Boundary Layers*. Oxford Univ. Press, London and New York. [135, 144, 145, 145, 151, 180]

Rubinow, S. I., and Keller, J. B. (1961). The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.* **11**, 447—459. [87]

Saffman, P. G. (1970). The velocity of viscous vortex rings. *Studies Appl. Math.* **49**, 371—380. [272]

Sampson, R. A. (1891). On Stokes's current function. *Phil. Trans. Roy. Soc. Ser.* **A182**, 449—518. (esp. 504). [244]

Schlighting, H. (1960). *Boundary Layer Theory*, 2nd English ed. McGraw-Hill, New York. [1, 20, 21, 144, 235, 235]

Schneider, W. (1973). A note on a breakdown of the multiplicative composition of inner and outer expansions. *J. Fluid Mech.* **59**, 785—789. [249]

Schwartz, L. W. (1974). Computer extension and analytic continuation of Stokes' expansion for gravity waves. *J. Fluid Mech.* **62**, 553—578. [237, 267]

Sears, W. R., and Telionis, D. P. (1975). Boundary-layer separation in unsteady flow. *SIAM J. Appl. Math.* **28**, 215—235. [241]

Serbin, H. (1958). The high speed flow of gas around blunt bodies. *Aero. Quart.* **9**, 313—330. [25]

Shanks, D. (1955). Non-linear transformations of divergent and slowly convergent sequences. *J. Math. and Phys.* **34**, 1—42. [6, 221, 225]

Sheer, A. F. (1971). A uniformly asymptotic solution for incompressible flow past thin sharp-edged aerofoils at zero incidence. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **70**, 135—155. [246]

Simasaki, T. (1956). On the flow of a compressible fluid past a circular cylinder. II. *Bull. Univ. Osaka Prefecture Ser. A.* **4**, 27—35. [5, 234]

Skinner, L. A. (1975). Generalized expansions for slow flow past a cylinder. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **28**, part 3. [239, 259, 261]

Spreiter, J. R. (1953). On the application of transonic similarity rules to wings of finite span. *Rep. N. A. C. A.* No. 1153. [24]

Spreiter, J. R. (1959). Aerodynamics of wings and bodies at transonic speeds. *J. Aerospace Sci.* **26**, 465—487. [3]

Stewartson, K. (1956). On the steady flow past a sphere at high Reynolds number using Oseen's approximation. *Philos. Mag.* [8] **1**, 345—354. [230]

Stewartson, K. (1957). On asymptotic expansions in the theory of boundary layers. *J. Math. and Phys.* **36**, 173—191. [33, 145, 146, 230, 251]

Stewartson, K. (1958). On Goldstein's theory of laminar separation. *Quart. J.*

Mech. Appl. Math. **11**, 399—410. [241, 270]

Stewartson, K. (1961). Viscous flow past a quarter-infinite plate. *J. Aerospace Sci.* **28**, 1—10. [219]

Stewartson, K. (1968). On the flow near the trailing edge of a flat plate. *Proc. Roy. Soc. Ser.* **A306**, 275—290. [254]

Stewartson, K. (1969). On the flow near the trailing edge of a flat plate II. *Mathematika* **16**, 106—121. [253]

Stewartson, K. (1974). Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies. *Adv. Appl. Mech.* **14**, 145—239. [254]

Stewartson, K., and Williams, P. G. (1969). Self-induced separation. *Proc. Roy. Soc. Ser. A***312**, 181—206. [254]

Stoker, J. J. (1957). *Water Waves*. Wiley (Interscience), New York. [47]

Stokes, G. G. (1851). On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Camb. Phil. Soc.* **9**. Part II, 8—106. Reprinted: *Math. and Phys. Papers* **3**, 1—141. Cambridge Univ. Press. [168]

Stone, A. H. (1948). On supersonic flow past a slightly yawing cone. *J. Math. and Phys.* **27**, 67—81. [10]

Stuff, R. (1972). Closed form solution for the sonic boom in a polytropic atmosphere. *J. Aircraft* **9**, 556—562. [251]

Sychev, V. V. (1962). On the method of small disturbances in the problem of the hypersonic gas flow over thin blunted bodies (Russian). *Zh. Prikl. Mekh. i Tekh. Fiz.* No 6, 50—59. Grumman Aircraft Eng. Corp., Res. Dept., English Transl. TR-25. [211]

Sychev, V. V. (1972). [On] laminar separation. *Mekh. Zhidk. Gaza*, No. 3, 47—59; English transl.: *Fluid Dyn.* **7**, 407—417. [255]

Tamada, K. and Miyagi, T. (1962). Laminar viscous flow past a flat plate set normal to the stream, with special reference to high Reynolds numbers. *J. Phys. Soc. Japan* **17**, 373—390. [32]

Taneda, S. (1956). Studies on wake vortices (III). Experimental investigation of the wake behind a sphere at low Reynolds numbers. *Rep. Res. Inst. Appl. Mech. Kyushu Univ.* **4**, 99—105. [176]

Telionis, D. P., and Tsahalis, D. Th. (1973). Unsteady laminar separation over cylinders started impulsively from rest. Presented at 24th Internat. Astronaut. Cong., Baku. To be published in *Acta Astronautica*. [241]

Terrill, R. M. (1973). On some exponentially small terms arising in flow through a porous pipe. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **26**, 347—354. [260]

Thurber, J. K. (1961). An asymptotic method for determining the lift distribution of a sweptback wing of finite span. Ph. D. Dissertation. New York Univ.

Thurber, J. K. (1965). An asymptotic method for determining the lift distribution of a sweptback wing of finite span. *Comm. Pure Appl. Math.* **18**,

733—756 [264]

Thwaites, B., ed. (1960). *Incompressible Aerodynamics*. Oxford Univ. Press, London and New York. [51]

Tifford, A. N. (1954). Heat transfer and frictional effects in laminar boundary layers. Part 4. Universal series solutions. *Tech. Rep., Wright Air Dev. Center* No. 53—288. [7, 21]

Ting, L. (1959). On the mixing of two parallel streams. *J. Math. and Phys.* **38**, 153—165. [86, 272]

Ting, L. (1960). Boundary layer over a flat plate in presence of shear flow. *Phys. Fluids* **3**, 78—81. [87]

Ting, L. (1968). Asymptotic solutions of wakes and boundary layers. *J. Eng. Math.* **2**, 23—38. [252]

Ting, L. and Keller, J. B. (1974). Planing of a flat plate at high Froude number. *Phys. Fluids* **17**, 1080—1086. [272]

Tokuda, N. (1971). An asymptotic theory of the jet flap in three dimensions. *J. Fluid Mech.* **46**, 705—726. [264]

Tomotika, S., and Aoi, T. (1950). The steady flow of viscous fluid past a sphere and circular cylinder at small Reynolds numbers. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **3**, 140—161. [167, 172, 181, 183]

Traugott, S. C. (1962). Evaluation of indeterminate second-order effects for the Rayleigh problem. *Phys. Fluids* **5**, 1125—1126. [60]

Tritton, D. J. (1959). Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **6**, 547—567. [181]

Tsien, H. S. (1956). The Poincaré-Lighthill-Kuo method. *Advances in Appl. Mech.* **4**, 281—349. [111]

Tung, C., and Ting, L. (1967). Motion and decay of a vortex ring. *Phys. Fluids* **10**, 901—910. [272]

Underwood, R. L. (1969). Calculation of incompressible flow past a circular cylinder at moderate Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **37**, 95—114. [259]

Usher, P. D. (1968). Coordinate stretching and interface location. II. A new PL expansion. *J. Comp. Phys.* **3**, 29—39. [239]

van de Vooren, A. I., and Dijkstra, D. (1970). The Navier-Stokes solution for laminar flow past a semi-infinite flat plate. *J. Eng. Math.* 4, 9—27. [253]

Van Dyke, M. D (1951). The combined supersonic-hypersonic similarity rule. *J. Aeronaut. Sci.* **18**, 499—500. [25]

Van Dyke, M. D. (1952). A study of second-order supersonic flow theory. *Rep. N. A. C. A.* No. 1081. [41, 85, 119, 123, 197]

Van Dyke, M. D. (1954). Subsonic edges in thin-wing and slender-body theory. *Tech. Note N. A. C. A.* No. 3343. [132]

Van Dyke, M. D. (1956). Second-order subsonic airfoil theory including edge

effects. *Rep. N. A. C. A.* No. 1274. [55]

Van Dyke, M. D. (1958a). The similarity rules for second-order subsonic and supersonic flow. *Rep. N. A. C. A.* No. 1374. [233]

Van Dyke, M. D. (1958b). A model of supersonic flow past blunt axisymmetric bodies with application to Chester's solution. *J. Fluid Mech.* **3**, 515—522. [223, 228, 229, 231]

Van Dyke, M. D. (1958c). The paraboloid of revolution in subsonic flow. *J. Math. and Phys.* **37**, 38—51. [85, 243]

Van Dyke, M. D. (1959). Second-order slender-body theory-axisymmetric flow. *Tech. Rep. N. A. S. A.* No. R-47. [84]

Van Dyke, M. D. (1962a). Higher approximations in boundary-layer theory. Part. 1. General analysis. *J. Fluid Mech.* **14**, 161—177. [32, 150, 150]

Van Dyke, M. D. (1962b). Higher approximations in boundary-layer theory. Part 2. Application to leading edges. *J. Fluid Mech.* **14**, 481—495. [137]

Van Dyke, M. D. (1964a). Higher approximations in boundary-layer theory. Part 3. Parabola in uniform stream. *J. Fluid Mech.* **19**, 145—159. [7, 43, 223, 228, 232]

Van Dyke, M. D. (1964b). Lifting-line theory as a singular perturbation problem. *Arch. Mech. Stos.* **16**, No. 3. [190]

Van Dyke, M. (1970). Extension of Goldstein's series for the Oseen drag of a sphere. *J. Fluid Mech.* **44**, 365—372. [237, 267]

Van Dyke, M. (1974). Analysis and improvement of perturbation series. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **27**, 423—450. [266, 271]

Van Dyke, M. (1975). Computer extension of perturbation series in fluid mechanics. *SIAM J. Appl. Math.* **28**, 720—734. [236]

Van Dyke, M. (1976). Extension, analysis, and improvement of perturbation series. *Proc. 10th Naval Hydrodynamics Symposium*, 1974, To be published. [236, 267]

Van Tuyl, A. (1959). The use of rational approximations in the calculation of flows with detached shocks. *Rep. U. S. Naval Ord. Lab.* No. 6679. [229]

Van Tuyl, A. (1960). The use of rational approximations in the calculation of flows with detached shocks. *J. Aerospace Sci.* **27**, 559—560. [225]

Veidman, A. E. P. (1973). The numerical solution of the Navier-Stokes equations for laminar incompressible flow past a paraboloid of revolution. *Computers and Fluids* **1**, 251—271. [239, 244, 262]

Veldman, A. E. P., and Van de Vooren, A. I. (1974). Drag of a finite flat plate. *Proc. 4th Internal. Conf. Numer. Methods Fluid Dyn., Boulder, Colo., Lecture Notes in Physics* **35**, 423—430. Springer-Verlag, Berlin and New York. [254]

Vincenti, W. G. (1959). Non-equilibrium flow over a wavy. wall. *J. Fluid Mech.*

6, 481—496 [212]

Viviand, H., and Berger, S. A. (1964). Incompressible laminar axisymmetric near wake behind a very slender cylinder in axial flow. *Rep. Inst. Eng. Res. Univ. Calif.* No. Ts 64-5; *AIAA J.* 3(1965) 1806—1812. [239]

von Kármán, T. (1947). The similarity law of transonic flow. *J. Math. and Phys.* **26**, 182—190. [23]

von Kármán, T., and Burgers, J. M. (1935). General aerodynamic theory-perfect fluids Division E. *Aerodynamic Theory* (W. F. Durand, ed.), Vol. 2. Springer, Berlin. [63]

Ward, G. N. (1955). *Linearized Theory of Steady High-Speed Flow.* Cambridge Univ. Press, London and New York. [47, 194]

Wasow, W. (1955). On the convergence of an approximation method of M. J. Lighthill. *J. Rat. Mech. Anal.* **4**, 751—767. [112]

Wendt, H. (1948). Die Jansen-Rayleighsche Näherung zur Berechnung von Unterschallströmungen. *Sitzsber. Heidelberg. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl.*, 1948 **7**, 147—170. [5]

Werle, M. J., and Davis, R. T. (1972). Incompressible laminar boundary layers on a parabola at angle of attack: a study of the separation point. *J. Appl. Mech.* **39**, 7—12. [262]

Weyl, H. (1942). On the differential equations of the simplest boundary-layer problems. *Ann. of Math.* **43**, 381—407. [144]

Whitehead, A. N. (1889). Second approximations to viscous fluid motion. *Quart. J. Math.* **23**, 143—152. [168]

Whitham, G. B. (1952). The flow pattern of a supersonic projectile. *Comm. Pure Appl. Math.* **5**, 301—348. [111, 124, 126, 129]

Whitham, G. B. (1953). The propagation of weak spherical shocks in stars. *Comm. Pure Appl. Math.* **6**, 397—414. [111]

Wilkinson, J. (1955). A note on the Oseen approximation for a paraboloid in a uniform stream parallel to its axis. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **8**, 415—421. [183]

Wu, Y. T. (1956). Two dimensional sink flow of a viscous, heat-conducting, compressible fluid; cylindrical shock waves. *Quart. Appl. Math.* **13**, 393—418. [112]

Yajnik, K. S. (1970). Asymptotic theory of turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.* **42**, 411—427. [249]

Yakura, J. K. (1962). Theory of entropy layers and nose bluntness in hypersonic flow. *Hypersonic Flow Research* (F. R. Riddell, ed.), pp. 421—470. Academic Press. New York. [10, 87, 201, 208, 210]

Yamada, H. (1954). On the slow motion of viscous liquid past a circular cylinder. *Rep. Res. Inst. Appl. Mech. Kyushu Univ.* 3, 11—23. [172]

Yoshizawa, A. (1970). Laminar viscous flow past a semi-infinite flat plate. *J. Phys. Soc. Japan* **28**, 776—779. [253]